

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ ТЕЧЕНИИ

Гусев А.С., Пышнограй И.Г., Пышнограй Г.В., Ярмолинская В.В.
Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова

Аннотация. В работе рассмотрено течение нелинейной вязкоупругой жидкости с одним тензорным внутренним параметром между параллельными плоскостями под действием постоянного перепада давления, численно найдены зависимости составляющих тензора напряжений и компоненты продольной скорости от градиента давления и расстояния до стенки, что позволило объяснить появление непараболического профиля продольной скорости полимерного расплава.

Ключевые слова: реология, линейные полимеры, реологическое уравнение состояния, нелинейные эффекты.

При моделировании течений растворов и расплавов линейных полимеров важную роль играет формулировка реологического определяющего соотношения, которое устанавливает связь между кинематическими характеристиками потока и внутренними термодинамическими параметрами. Ранее [1] была предложена, исходя из микроструктурных представлений, простая реологическая модель

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + 3\frac{\eta_0}{\tau_0}a_{ik}$$
$$\frac{d}{dt}a_{ik} - v_{ij}a_{jk} - v_{kj}a_{ji} + \frac{1 + (\kappa - \beta)I}{\tau_0}a_{ik} = \frac{2}{3}\gamma_{ik} - 3\frac{\beta}{\tau_0}a_{ij}a_{jk} \quad (1)$$

где σ_{ik} – тензор напряжений; p – гидростатическое давление; η_0 и τ_0 – начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации; v_{ik} – тензор градиентов скорости; a_{ik} – симметричный тензор анизотропии второго ранга; $I = a_{jj}$ – первый инвариант тензора анизотропии; $\gamma_{ik} = \frac{1}{2}(v_{ik} + v_{ki})$ – симметризованный тензор градиентов скорости; κ, β – феноменологические параметры модели, учитывающие в уравнениях динамики макромолекулы размеры и форму молекулярного клубка. Эта модель проверялась на соответствие вискозиметрическим течениям реальных полимерных жидкостей [1-3] и путем расчета наложения малых осциллирующих колебаний на простое сдвиговое течение в параллельном и ортогональном сдвигу направлениях [3]. При проведении численного эксперимента были получены зависимости тензора напряжений от градиентов скорости и от времени, что позволило выполнить расчеты составляющих комплексного модуля сдвига, динамической вязкости и угла динамических потерь в зависимости от частоты вынуждающих колебаний, скорости сдвига и числа Деборы (De). Полученные зависимости сравнивались с экспериментальными данными, взятыми из литературных источников, что показало качественное соответствие теории и эксперимента.

Также на основе реологической модели нулевого приближения (1) были рассчитаны вторичные течения в каналах прямоугольного сечения. В работе [4] было рассмотрено стационарное течение в гладкой круглой трубе под действием постоянного перепада давления. При этом система уравнений для решения полной гидродинамической задачи была записана в цилиндрической системе координат.

В настоящей работе будем решать задачу об определении профиля скорости нелинейной вязкоупругой жидкости, движущейся в зазоре между параллельными плоскостями под действием постоянного перепада давления $\frac{\partial p}{\partial x} = -A$, на основе модели (1). Расположим начало координат в одной из этих плоскостей, ось Ox направим вдоль потока, ось Oy – перпендикулярно плоскостям, и ось Oz – перпендикулярно осям Ox и Oy .

Тогда система уравнений динамики в декартовой системе координат будет иметь вид:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0,$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z},$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z},$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z}.$$

где V_x , V_y , V_z – скорости вдоль осей Ox , Oy и Oz соответственно; ρ – плотность.

Так как вдоль оси Oz профиль скорости меняться не будет, то окончательные выражения не будут зависеть от переменной Z и система уравнений (1) – (2) примет вид:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0,$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y},$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y},$$

$$\sigma_{xx} = -p + 3 \frac{\eta_0}{\tau_0} a_{xx}, \sigma_{xy} = 3 \frac{\eta_0}{\tau_0} a_{xy}, \sigma_{yy} = -p + 3 \frac{\eta_0}{\tau_0} a_{yy},$$

$$\frac{\partial a_{xx}}{\partial t} + V_x \frac{\partial a_{xx}}{\partial x} + V_y \frac{\partial a_{xx}}{\partial y} - 2a_{xx} \frac{\partial V_x}{\partial x} - 2a_{xy} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{1 + (\kappa - \beta)I}{\tau_0} a_{xx} =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{\partial V_x}{\partial x} - 3 \frac{\beta}{\tau_0} (a_{xx}^2 + a_{xy}^2),$$

$$\frac{\partial a_{xy}}{\partial t} + V_x \frac{\partial a_{xy}}{\partial x} + V_y \frac{\partial a_{xy}}{\partial y} - a_{xy} \frac{\partial V_x}{\partial x} - a_{xy} \frac{\partial V_y}{\partial y} - a_{xx} \frac{\partial V_y}{\partial x} - a_{yy} \frac{\partial V_x}{\partial y} +$$

$$+ \frac{1 + (\kappa - \beta)I}{\tau_0} a_{xy} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) - 3 \frac{\beta}{\tau_0} a_{xy} (a_{xx} + a_{yy}),$$

$$\frac{\partial a_{yy}}{\partial t} + V_x \frac{\partial a_{yy}}{\partial x} + V_y \frac{\partial a_{yy}}{\partial y} - 2a_{xy} \frac{\partial V_y}{\partial x} - 2a_{yy} \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{1 + (\kappa - \beta)I}{\tau_0} a_{yy} =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{\partial V_y}{\partial y} - 3 \frac{\beta}{\tau_0} (a_{xy}^2 + a_{yy}^2).$$

Система уравнений (3) описывает плоские двумерные неустановившиеся течения полимерных сред. Далее будем искать независящие от переменной x решения этой системы. Получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0, \\
\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + 3 \frac{\eta_0}{\tau_0} \frac{\partial a_{xy}}{\partial y}, \\
\rho \left(\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + 3 \frac{\eta_0}{\tau_0} \frac{\partial a_{yy}}{\partial y}, \\
\frac{\partial a_{xx}}{\partial t} + V_y \frac{\partial a_{xx}}{\partial y} - 2a_{xy} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{1 + (\kappa - \beta)I}{\tau_0} a_{xx} &= -3 \frac{\beta}{\tau_0} (a_{xx}^2 + a_{xy}^2), \\
\frac{\partial a_{xy}}{\partial t} + V_y \frac{\partial a_{xy}}{\partial y} - a_{xy} \frac{\partial V_y}{\partial y} - a_{yy} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{1 + (\kappa - \beta)I}{\tau_0} a_{xy} &= \\
= \frac{1}{3} \frac{\partial V_x}{\partial y} - 3 \frac{\beta}{\tau_0} a_{xy} (a_{xx} + a_{yy}), \\
\frac{\partial a_{yy}}{\partial t} + V_y \frac{\partial a_{yy}}{\partial y} - 2a_{yy} \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{1 + (\kappa - \beta)I}{\tau_0} a_{yy} &= \frac{2}{3} \frac{\partial V_y}{\partial y} - 3 \frac{\beta}{\tau_0} (a_{xy}^2 + a_{yy}^2)
\end{aligned} \tag{4}$$

Из первого уравнения системы (4) следует, что $V_y(y)$ – линейная функция y , но в силу граничных условий $V_y(0) = V_y(h) = 0$, откуда видно, что $V_y(y) = 0$ и уравнение неразрывности выполняется автоматически. Учитывая это, уравнения (4) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial V_x}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + 3 \frac{\eta_0}{\tau_0} \frac{\partial a_{xy}}{\partial y}, \\
3 \frac{\eta_0}{\tau_0} \frac{\partial a_{yy}}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial y}, \\
\frac{\partial a_{xx}}{\partial t} - 2a_{xy} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{1 + (\kappa - \beta)I}{\tau_0} a_{xx} &= -3 \frac{\beta}{\tau_0} (a_{xx}^2 + a_{xy}^2), \\
\frac{\partial a_{xy}}{\partial t} - a_{xy} \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{1 + (\kappa - \beta)I}{\tau_0} a_{xy} &= \frac{1}{3} \frac{\partial V_x}{\partial y} - 3 \frac{\beta}{\tau_0} a_{xy} (a_{xx} + a_{yy}), \\
\frac{\partial a_{yy}}{\partial t} + \frac{1 + (\kappa - \beta)I}{\tau_0} a_{yy} &= -3 \frac{\beta}{\tau_0} (a_{xy}^2 + a_{yy}^2)
\end{aligned}$$

В стационарном случае имеем:

$$\begin{aligned}
3 \frac{\eta_0}{\tau_0} \frac{\partial a_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} = -A, \quad 3 \frac{\eta_0}{\tau_0} \frac{\partial a_{yy}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}, \\
a_{xx} = \frac{\tau_0}{1 + (\kappa - \beta)I} \left(2a_{xy} \frac{\partial V_x}{\partial y} - 3 \frac{\beta}{\tau_0} (a_{xx}^2 + a_{xy}^2) \right), \\
a_{xy} = \frac{\tau_0}{1 + (\kappa - \beta)I} \left(\left(a_{yy} + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial V_x}{\partial y} - 3 \frac{\beta}{\tau_0} a_{xy} (a_{xx} + a_{yy}) \right), \\
a_{yy} = -3 \frac{\beta}{1 + (\kappa - \beta)I} (a_{xy}^2 + a_{yy}^2)
\end{aligned} \tag{5}$$

В работе [5] система уравнений (5) решалась методом последовательных приближений с точностью до членов первого порядка по параметрам наведенной анизотропии κ и β , и были получены следующие выражения для составляющих тензора напряжений и компоненты продольной скорости:

$$V_x(y) = \frac{\bar{A}}{2\tau_0} y(h-y) + \frac{\bar{A}^3}{6\tau_0} \left(\frac{\kappa}{2} + \frac{7\beta}{4} \right) y(h-y) \left((h-y)^2 + y^2 \right);$$

$$a_{xx} = \frac{\bar{A}^2}{6}(h-2y)^2 \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) + \bar{A}^4(h-2y)^4 \frac{\beta}{24}; \quad (6)$$

$$a_{yy} = -\frac{\beta}{12} \bar{A}(h-2y)^2,$$

где

$$\bar{A} = \frac{A\tau_0}{\eta_0}.$$

Причем из второго уравнения системы (5) следует, что $\frac{\partial p}{\partial y} = \beta A(h-2y) \neq 0$, то есть обнаружен ненулевой перепад давления в направлении, перпендикулярном скорости течения, который, тем не менее, не приводит к появлению вторичных потоков. Этим перепадом давления может быть обусловлен эффект разбухания струи на выходе из канала. Полученные выражения в силу характера приближения не могут быть использованы при больших перепадах давления, которые представляют интерес на практике, и поэтому далее будем искать зависимости выражений для составляющих тензора напряжений и компоненты продольной скорости без учета малости параметров модели. Тогда из первого уравнения системы (5) имеем:

$$a_{xy} = \frac{\bar{A}}{6}(h-2y). \quad (7)$$

Отсюда видно, что сдвиговые напряжения в установившемся плоскопараллельном течении являются линейной функцией переменной y , а константа интегрирования выбрана из условия симметрии: $a_{xy}(h/2) = 0$. Для наглядности введем обозначения:

$$a_{xx} = u_1; a_{yy} = u_2; \frac{\partial V_x}{\partial y} = u_3. \quad (8)$$

Тогда система уравнений (5) примет вид:

$$u_1 = \frac{\tau_0}{1 + (\kappa - \beta)(u_1 + u_2)} \left(2a_{xy}u_3 - 3\frac{\beta}{\tau_0}(u_1^2 + a_{xy}^2) \right),$$

$$a_{xy} = \frac{\tau_0}{1 + (\kappa - \beta)(u_1 + u_2)} \left(\left(u_2 + \frac{1}{3} \right) u_3 - 3\frac{\beta}{\tau_0} a_{xy}(u_1 + u_2) \right), \quad (9)$$

$$u_2 = -3\frac{\beta}{1 + (\kappa - \beta)(u_1 + u_2)} (a_{xy}^2 + u_2^2).$$

Вычитая из первого уравнения системы (9) последнее уравнение после преобразований получим:

$$(1 + (\kappa + 2\beta)(u_1 + u_2))(u_1 - u_2) = 2\tau_0 a_{xy} u_3. \quad (10)$$

Второе уравнение системы (9) перепишем в виде:

$$(1 + (\kappa + 2\beta)(u_1 + u_2))a_{xy} = \tau_0 \left(u_2 + \frac{1}{3} \right) u_3. \quad (11)$$

Тогда разделив (10) на (11) получим:

$$\frac{u_1 - u_2}{a_{xy}} = 2\frac{a_{xy}}{u_2 + \frac{1}{3}} \quad \text{или} \quad u_1 = u_2 + 2\frac{a_{xy}^2}{u_2 + \frac{1}{3}} \quad (12)$$

Подставив (12) в последнее уравнение системы (9) получим уравнение, содержащее только переменную u_2 , которое после преобразований запишем в виде:

$$u_2 = -\frac{3\beta(a_{xy}^2 + u_2^2)\left(u_2 + \frac{1}{3}\right)}{u_2 + \frac{1}{3} + 2(\kappa - \beta)\left(a_{xy}^2 + u_2\left(u_2 + \frac{1}{3}\right)\right)} \quad (13)$$

Уравнение (13) можно решать одним из итерационных методов, например, методом последовательных приближений и, принимая во внимание выражение (7), можно найти зависимость: $u_2 = u_2(y)$ которая, в силу (12) и (11) приводит к зависимостям $u_1 = u_1(y)$ и $u_3 = u_3(y)$. Далее численно интегрируя $u_3(y)$, учитывая (8) и используя граничное условие $V_x(0) = 0$ можно найти зависимость $V_x(y)$.

Заметим при этом, что условие симметрии: $a_{xy}(h/2) = 0$ автоматически приводит к выполнению второго граничного условия: $V_x(h) = 0$.

Рассмотрим теперь как влияют параметры модели K , β и \bar{A} на вид полученных зависимостей. Для этого зафиксируем масштабные параметры $\tau_0 = 1$ и $\eta_0 = 1$ (в этом случае $\bar{A} = A$), и будем принимать во внимание, что во многих случаях, как показано в [6] $\kappa = 1,2\beta$. Результаты расчетов приведены на рисунках 1-6.

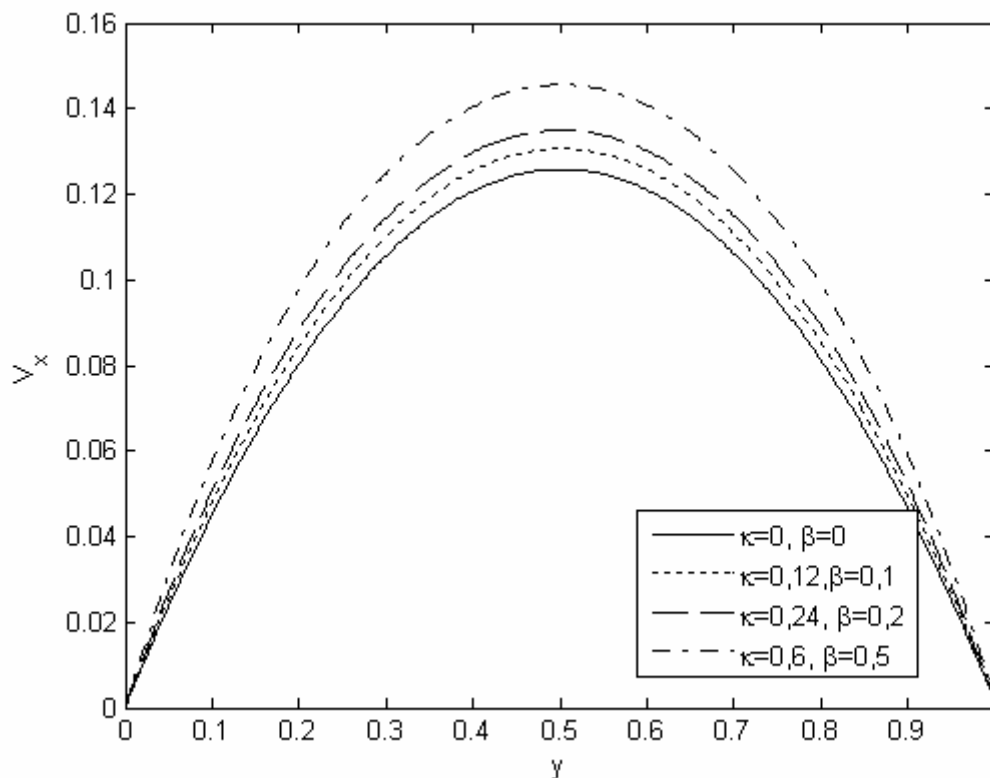


Рис 1. Влияние параметров наведенной анизотропии K и β на профиль продольной скорости при фиксированном значении $\bar{A} = 1$.

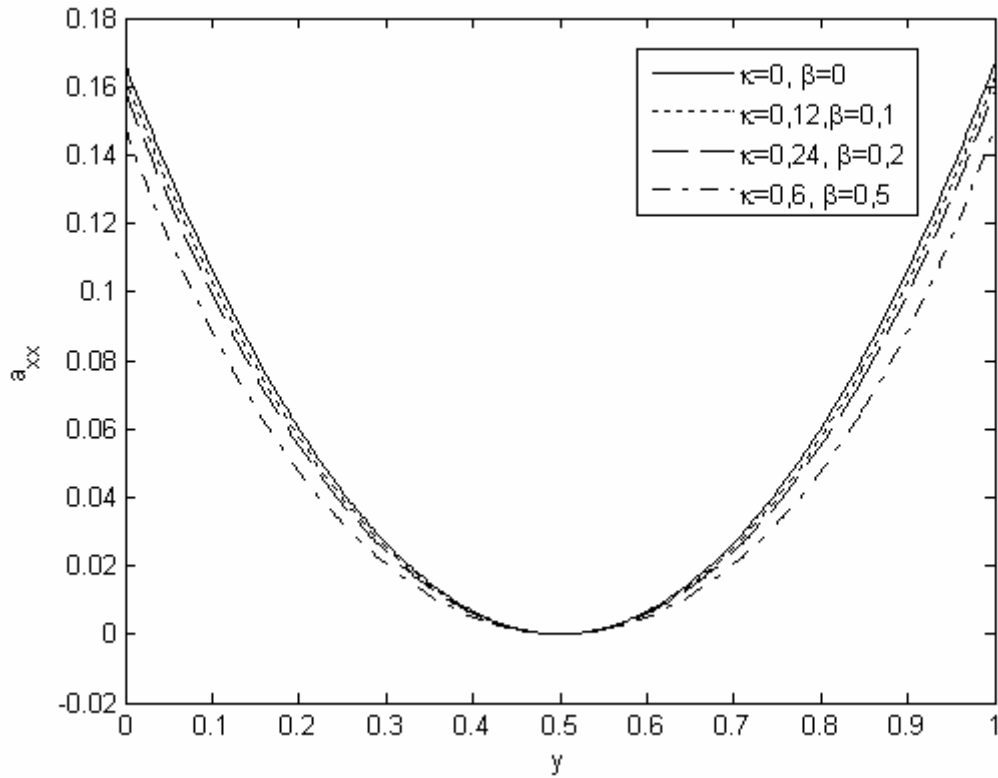


Рис 2. Влияние параметров наведенной анизотропии κ и β на зависимость xx компоненты тензора анизотропии при фиксированном значении $\bar{A} = 1$.

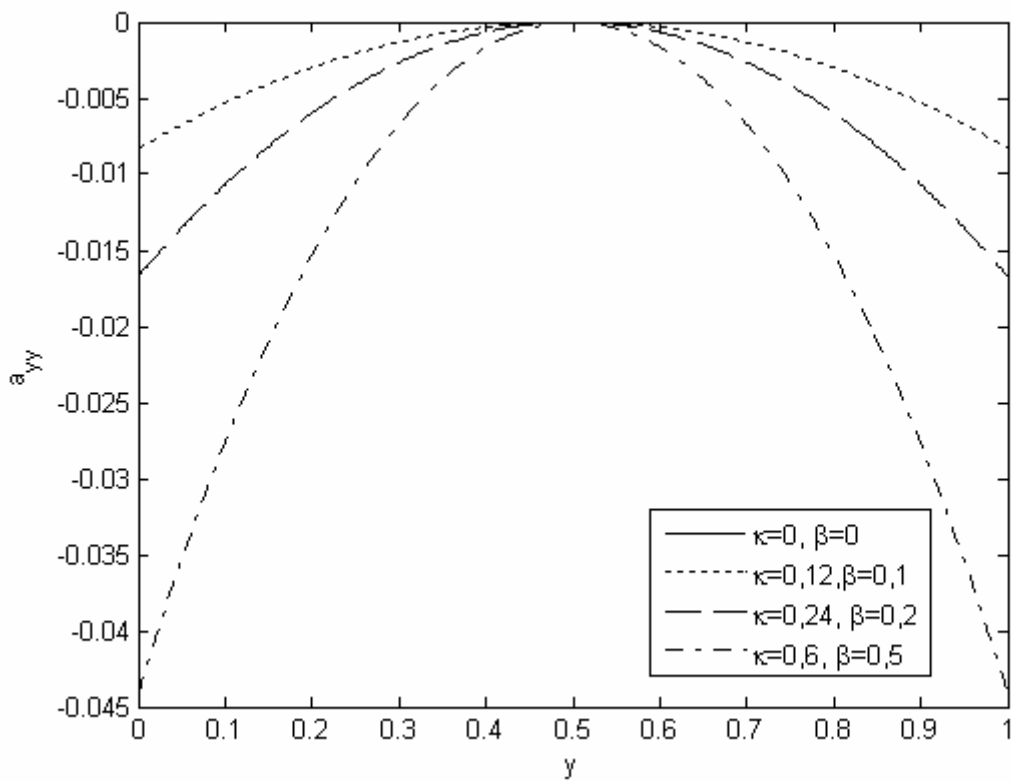


Рис 3. Влияние параметров наведенной анизотропии κ и β на зависимость yy компоненты тензора анизотропии при фиксированном значении $\bar{A} = 1$.

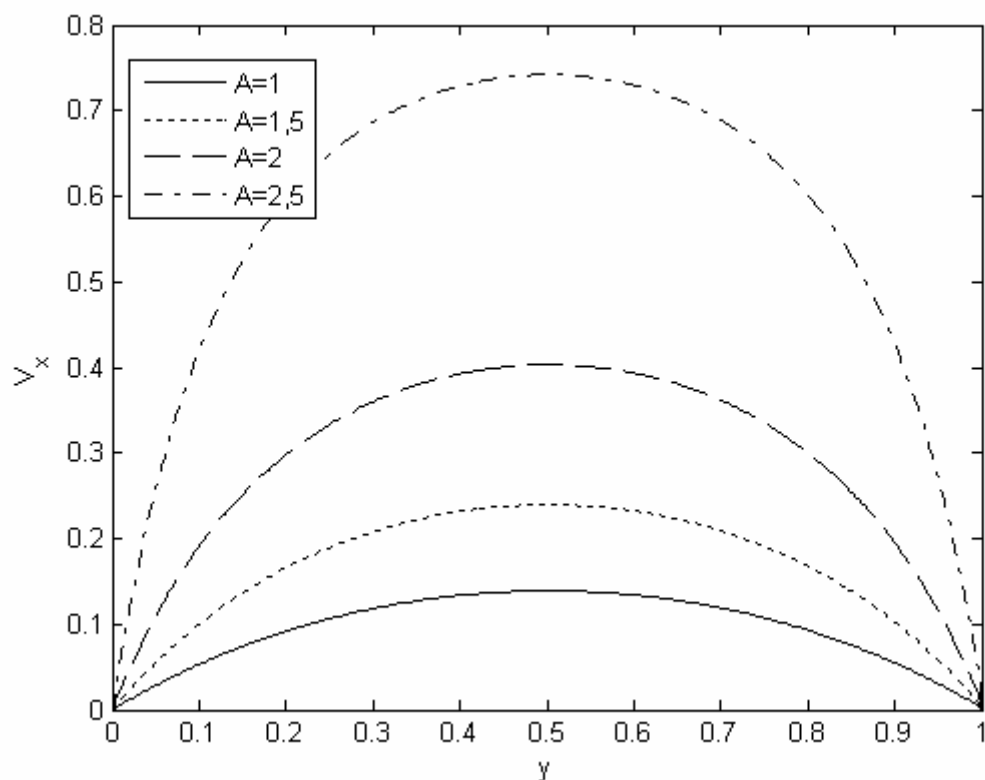


Рис 4. Влияние градиента давления \bar{A} на профиль продольной скорости при $\kappa = 0,36$ и $\beta = 0,3$.

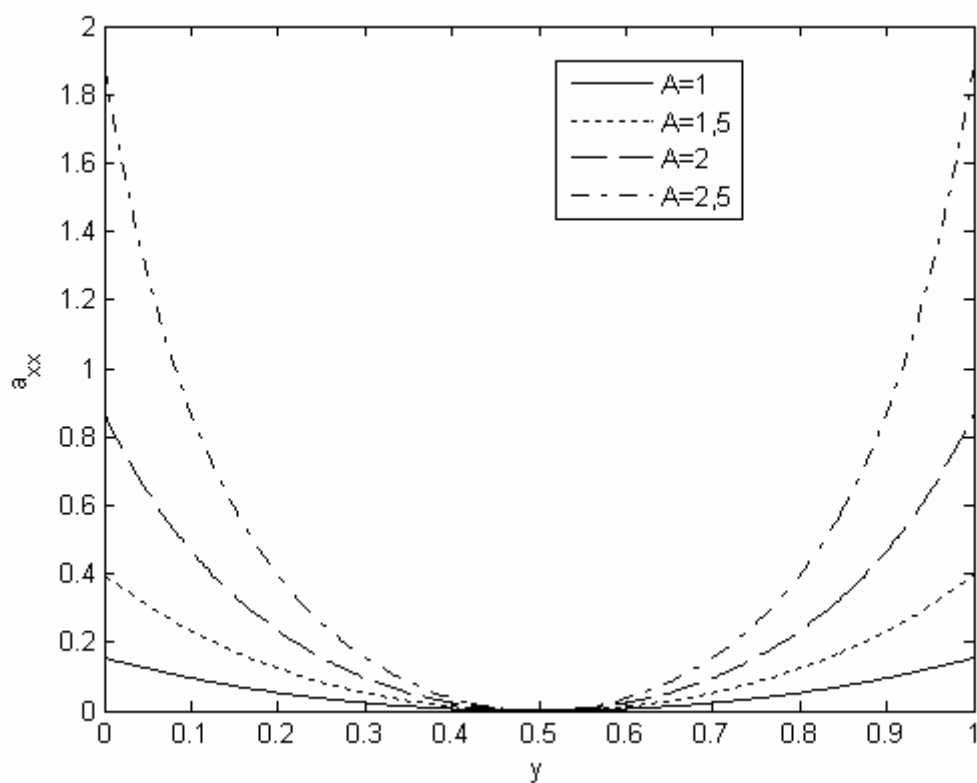


Рис 5. Влияние градиента давления \bar{A} на зависимость xx компоненты тензора анизотропии при $\kappa = 0,36$ и $\beta = 0,3$.

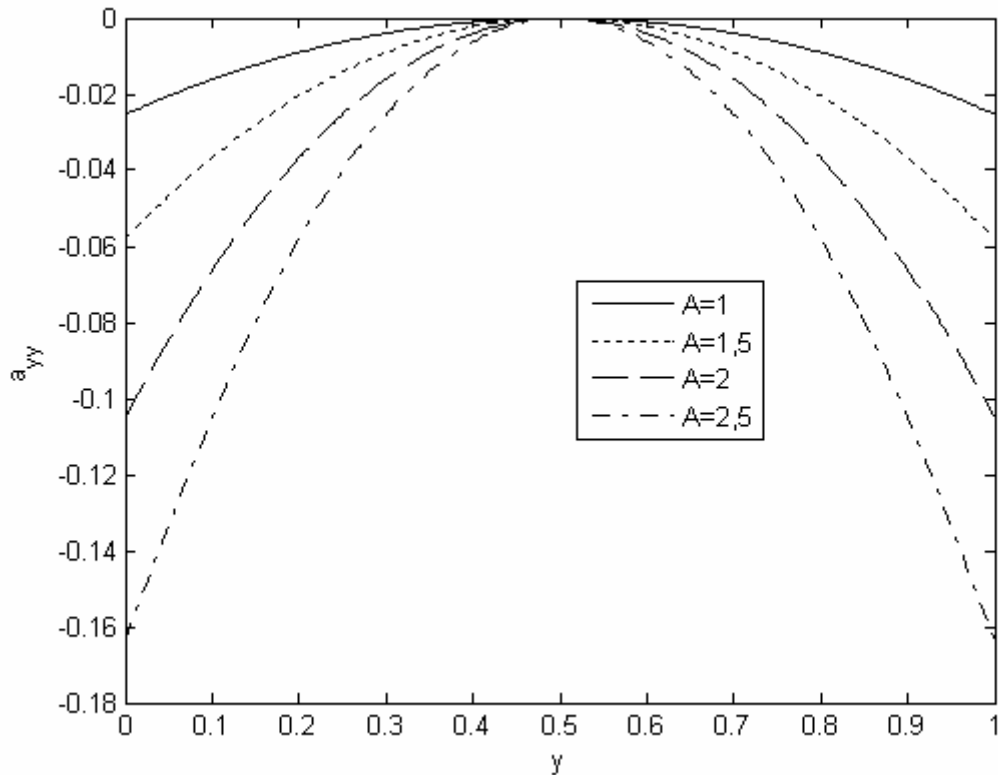


Рис 6. Влияние градиента давления \bar{A} на зависимость a_{yy} компоненты тензора анизотропии при $\kappa = 0,36$ и $\beta = 0,3$.

Откуда видно (рис. 1-3), что случай $\kappa = 0$ и $\beta = 0$ соответствует ньютоновской жидкости (параболический профиль скорости и $a_{yy} = 0$) и с ростом κ и β увеличивается отклонение в поведении жидкости от ньютоновского закона. Также видно (рис. 4-6), что при увеличении перепада давления растут абсолютные значения a_{xx} , a_{yy} и V_x и увеличивается отклонение в поведении жидкости от ньютоновского закона.

При экспериментальном исследовании течений полимерных сред удобно варьировать не градиент давления, а удельный расход жидкости. Эту величину можно определить, проинтегрировав зависимость $V_x(y)$ по переменной y от 0 до h . На рисунке 6 построена зависимость удельного расхода Q от градиента давления A для различных значений параметров κ и β откуда видно, что случай $\kappa = 0$ и $\beta = 0$ соответствует закону Пуазейля:

$$Q = \int_0^h V_x(y) dy = \frac{\bar{A}}{12\tau_0} h^3,$$

и с ростом κ и β растет отклонение зависимости $Q(\bar{A})$ от линейного закона.

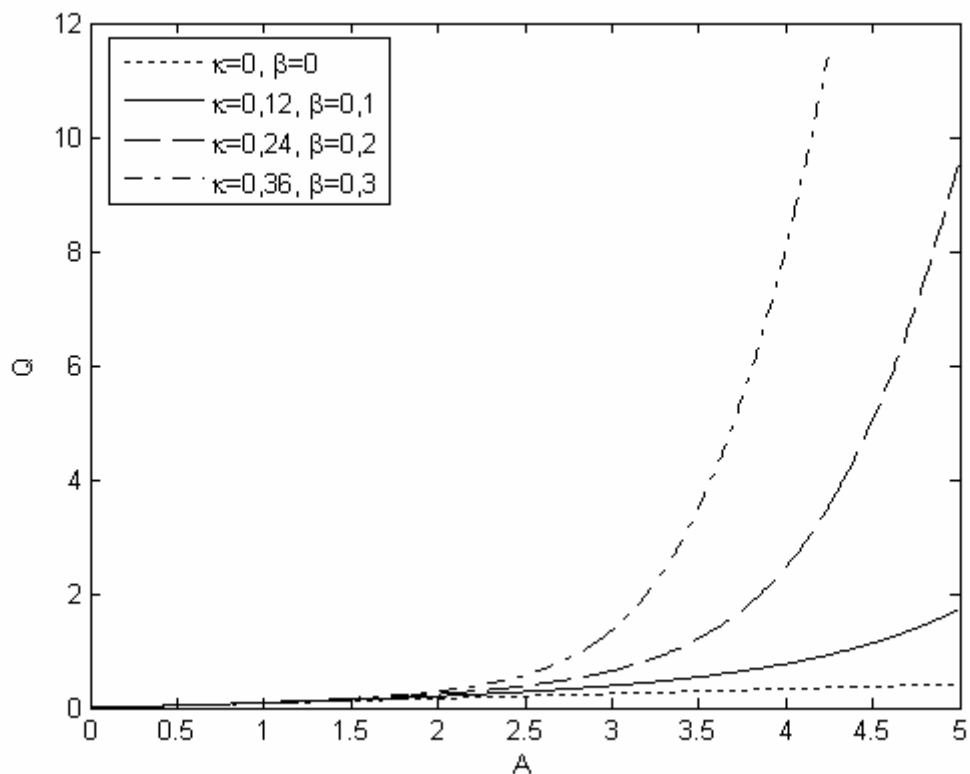


Рис. 7 Зависимость удельного расхода от перепада давления при различных значениях параметров κ и β .

Теперь появляется возможность проследить, как влияет удельный расход на вид профиля скорости. Из графиков приведенных на рисунке 8 видно, что с ростом величины Q растет максимальное значение скорости и ее отклонение от параболического профиля, соответствующего Пуазейлевскому профилю.

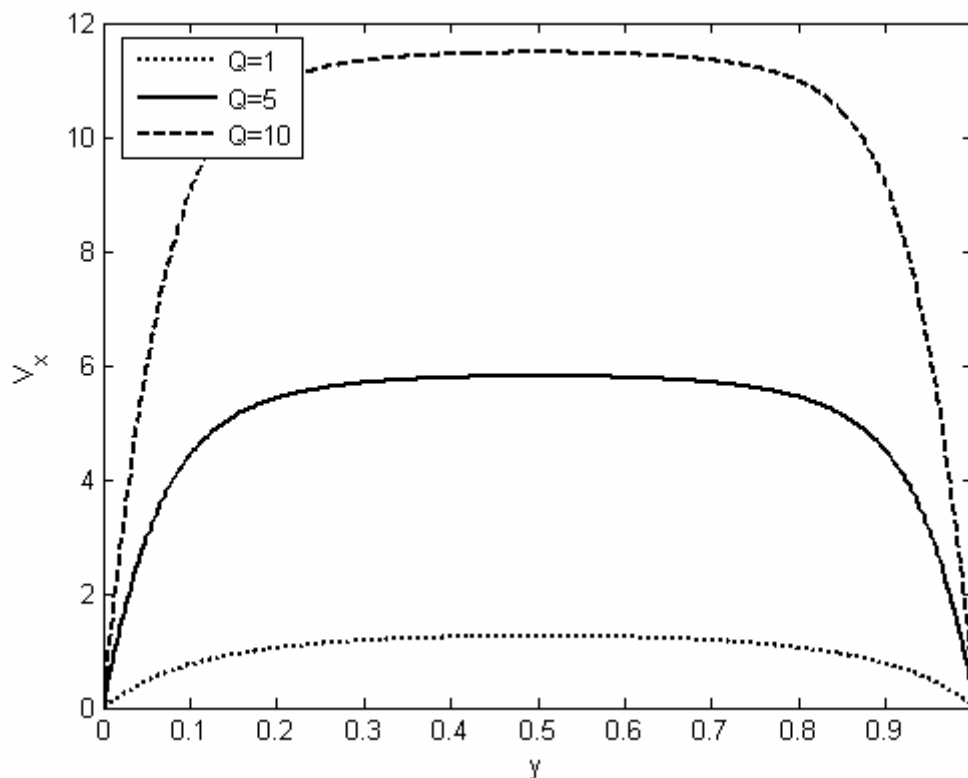


Рис. 8. Распределение продольной скорости V_x для различных значений удельного расхода Q при $\kappa = 0,24$ и $\beta = 0,2$.

При этом расчеты показывают, что для $Q > 10$ форма профиля скорости меняется незначительно. Заметим, что аналогичные результаты получаются в работе [7] на основе другой реологической модели.

Сравним результаты расчетов профиля скорости с экспериментальными данными [8], полученными при продавливании расплава полиэтилена через канал шириной 1,03 мм и длиной 50 мм. Значения $\kappa = 0,006$ и $\beta = 0,005$ при этом выбирались из условия наилучшего соответствия кривых для сдвиговой вязкости и условия $\kappa = 1,2\beta$. Результаты сравнения представлены на рис. 9.

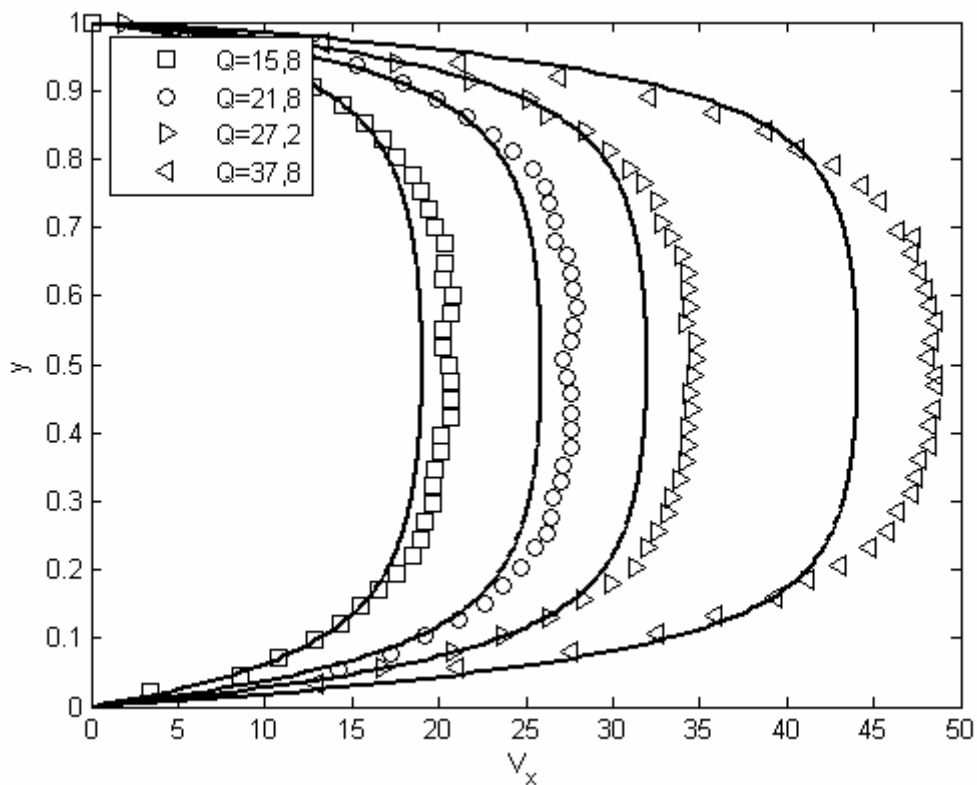


Рис. 9. Распределение продольной скорости V_x для различных значений удельного расхода Q при $\kappa = 0,006$ и $\beta = 0,005$. Экспериментальные значения (точки) из работы [9] и теоретические зависимости даны сплошными линиями.

Таким образом, в рассмотренном случае плоского течения Пуазейля, система уравнений модифицированной модели Виноградова-Покровского описывает непараболический профиль скорости в зазоре между параллельными пластинами, что подтверждается экспериментальными данными. Полученные при этом зависимости могут быть использованы при разработке численных методов 2-мерных и 3-мерных течений в качестве начального приближения входного и выходного профилей, при моделировании течений полимерных жидкостей в зазоре между параллельными плоскостями, например, при формовании тонких пленок.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (код проекта 06-01-00402а).

Литература

1. Пышнограй Г.В., Покровский В.Н., Яновский Ю.Г., Образцов И.Ф., Карнет Ю.А. Определяющее уравнение нелинейных вязкоупругих (полимерных) сред в нулевом приближении по параметрам молекулярной теории и следствия для сдвига и растяжения // Доклады АН. – 1994. – т.335. – № 9. – С.612–615.
2. Гусев А.С., Пышнограй Г.В. Частотные зависимости динамических характеристик линейных полимеров при простом сдвиге // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2001. – № 2. – С. 236-245.
3. Гусев А.С., Макарова М.А., Пышнограй Г.В. Мезоскопическое уравнение состояния полимерных сред и описание динамических характеристик на его основе // Инженерно-физический журнал. – 2005. – т. 78. – №5. – С. 55-61.
4. Головичева И.Э., Пышнограй Г.В., Попов В.И. Обобщение закона Пуазейля на основе реологического определяющего соотношения полимерных жидкостей // Прикладная механика и теоретическая физика. – 1999. – т. 40. – № 5. – С. 158-163.
5. Алтухов Ю. А., Гусев А. С., Макарова М. А., Пышнограй Г. В. Обобщение закона Пуазейля для плоскопараллельного течения вязкоупругих сред// Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – № 4. – С. 581–590.
6. Зинович С.А., Головичёва И.Э., Пышнограй Г.В. Влияние молекулярной массы на сдвиговую и продольную вязкость линейных полимеров// Прикладная механика и техническая физика. – 2000. – т.41. – №2. – С.154-160.
7. R.R. Huilgol, Z. You, E. Mitsoulis Application of the Lambert W function to obtain analytic solutions for the Papanastasiou model// Book of Abstracts 4th Annual European Rheology Conference. – Napoli, Italy. – 2007. – P. 93.
8. E. Wassner, M. Schmidt, H. Munstedt Entry flow of a low-density-polyethylene melt into a slit die: An experimental study by laser-Doppler velocimetry // J. Rheol. – 1999. – 43(6). – pp. 1339-1353.