

# ОДНА ЗАДАЧА О РАСТЯЖЕНИИ И ОХЛАЖДЕНИИ ПОЛИМЕРНОЙ ПЛЕНКИ

Гусев А.С., Рыбаков А.А., Пышнограй Г.В.,  
Ярмолинская В.В.<sup>1</sup>

Алтайский государственный технический университет  
им. И.И. Ползунова

## Аннотация

Система уравнений динамики, описывающая установление поля скоростей при неизотермическом течении полимерной среды, записана в одномерном приближении на основе реологического определяющего соотношения и законов сохранения импульса и энергии. При этом удалось рассчитать форму края пленки после выхода из экструдера и распределение температур для различных типов граничных условий.

**Ключевые слова:** полимерная пленка, напряжение, теплоперенос.

При формовании полимерных пленок продавливанием через экструдер не всегда удается получить изделия с необходимыми свойствами, например, толщиной и прозрачностью. Это связано с высокой температурой расплава и разбуханием потока на выходе из экструдера. Поэтому полученную пленку в дальнейшем охлаждают и подвергают растяжению. Так как эти процессы происходят одновременно, то при их математическом моделировании необходимо совместное решение уравнений для напряжений и теплопереноса. В работе для нахождения установившихся напряжений при растяжении была использована обобщенная реологическая модель Виноградова-Покровского, параметры которой являются известными функциями температуры. При тепловом расчете предполагалось, что толщина пленки достаточно мала и можно считать температуру по толщине пленки постоянной.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №06-01-00402)

Для решения задачи растяжения и охлаждения пленки после выхода из экструдера будем использовать реологическое определяющее соотношение [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= -p\delta_{ik} + 3\frac{\eta_0}{\tau_0}a_{ik}; \\ \frac{d}{dt}a_{ik} - \nu_{ij}a_{jk} - \nu_{kj}a_{ji} + \frac{1+(\kappa-\beta)I}{\tau_0}a_{ik} &= \frac{2}{3}\gamma_{ik} - 3\frac{\beta}{\tau_0}a_{ij}a_{jk}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\sigma_{ik}$  – тензор напряжений;  $p$  – гидростатическое давление;  $\eta_0$  и  $\tau_0$  – начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации;  $\nu_{ik}$  – тензор градиентов скорости;  $a_{ik}$  – симметричный тензор анизотропии второго ранга;  $I = a_{jj}$  – первый инвариант тензора анизотропии;  $\gamma_{ik} = \frac{1}{2}(\nu_{ik} + \nu_{ki})$  – симметризованный тензор градиентов скорости;  $\kappa, \beta$  – феноменологические параметры модели, учитывающие в уравнениях динамики макромолекулы размеры и форму молекулярного клубка.

Тогда в декартовых координатах система уравнений динамики имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0; \\ \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z}; \\ \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) &= \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z}; \\ \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $v_x, v_y, v_z$  – скорости вдоль осей  $Ox, Oy$  и  $Oz$  соответственно;  $\rho$  – плотность. В неизотермическом случае система (1, 2) должна быть дополнена уравнением переноса энергии [2, 3]:

$$\begin{aligned} \rho C_V \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= \\ = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda \frac{\partial T}{\partial z}) + F, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $C_V$  – удельная теплоемкость при постоянном объеме;  $T$  – температура,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $F$  – диссипативная функция, которой можно пренебречь ( $F = 0$ ), так

как в нашем случае охлаждение происходит через поверхность пленки, что должно быть учтено граничными условиями.

Будем решать стационарную задачу, когда в неподвижной системе координат нет величин зависящих от времени. Начало координат поместим в середине выходного отверстия, ось  $x$  направлена вдоль движения пленки. Будем искать зависящее только от  $x$  решение системы (1–3)

$$v_x = v_x(x); \quad T = T(x).$$

Согласно [3] тензор напряжений в случае одноосного растяжения имеет вид:

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma_0(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и для растягивающего напряжения  $\sigma_0(x)$  можно записать соотношение

$$\sigma_0 = 3 \frac{\eta_0}{\tau_0} (a_{11} - a_{22}) = \lambda \left( \frac{dv_x}{dx} \right) \frac{dv_x}{dx}, \quad (4)$$

где  $\lambda \left( \frac{dv_x}{dx} \right)$  – вязкость при удлинении, зависящая от градиента скорости. Эту зависимость можно определить численно [4] из рисунка 1.

Полагая скорости вдоль осей  $Oy$  и  $Oz$  в виде

$$v_y = yv'_y(x); \quad v_z = zv'_z(x),$$

из системы (1–3) получаем

$$\begin{aligned} \rho v_x \frac{dv_x}{dx} &= \frac{d\sigma_0}{dx}; \quad \rho v_x \frac{dv'_y}{dx} + \rho (v'_y)^2 = 0; \\ \rho v_x \frac{dv'_z}{dx} + \rho (v'_z)^2 &= 0; \quad \frac{dv_x}{dx} + v'_y + v'_z = 0; \\ \rho C_V v_x \frac{dT}{dx} &= \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} - \mu (T - T_0), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $T$  – локальная температура пленки,  $T_0$  – температура окружающей среды,  $\mu$  – коэффициент теплообмена. Таким обра-

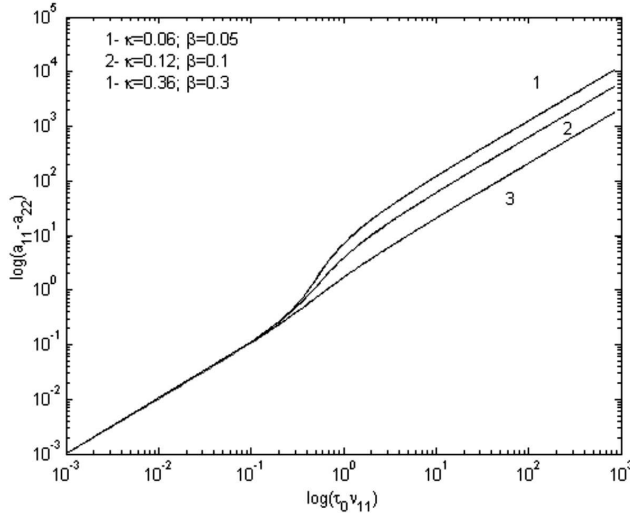


Рис. 1: Зависимость безразмерного растягивающего напряжения от скорости растяжения при различных значениях параметров анизотропии.

зом, из (4, 5) получаем систему уравнений для скорости растяжения и температуры

$$\begin{aligned} \rho v_x \frac{dv_x}{dx} &= 3 \frac{d}{dx} \left( \frac{\eta_0}{\tau_0} (a_{11} - a_{22}) \right); \\ \rho C_V v_x \frac{dT}{dx} &= \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} - \mu (T - T_0), \end{aligned} \quad (6)$$

которые могут быть решены численно для значений  $x$  на отрезке от 0 до  $l$ .

Эти уравнения необходимо дополнить граничными условиями для скорости и температуры. В случае  $v_x$  эти условия имеют вид:  $v_x(0) = v_0$ ;  $v_x(l) = kv_0$ , где  $k$  – коэффициент растяжения пленки.

Для температуры будем рассматривать граничные условия двух типов, связанных с тем, что температура пленки на барабане  $T(l)$  может быть задана, или подлежит определению. В связи с этим мы будем проводить численные расчеты для двух случаев задания граничных условий:

1) температура пленки при соприкосновении с барабаном совпадает с установившейся температурой барабана и равна

температуре окружающей среды

$$T(0) = T_1; T(l) = T_0;$$

2) температура пленки при соприкосновении с барабаном не известна

$$T(0) = T_1; T'(l) = 0.$$

Здесь  $T_0$  – температура окружающей среды.

При решении системы уравнений (6) будем полагать, что реологические параметры системы: начальная сдвиговая вязкость  $\eta_0$  и начальное время релаксации  $\tau_0$  зависят от температуры и имеют вид:

$$\begin{aligned}\eta_0 &= 2.5356 \cdot 10^8 \cdot \exp(-0.0451 \cdot T); \\ \tau_0 &= 4.004 \cdot \exp(-0.0302 \cdot T).\end{aligned}$$

Для численных расчетов были взяты следующие значения параметров:  $\kappa = 0.36$ ;  $\beta = 0.3$ ;  $\rho = 1$ ;  $C_V = 1$ ;  $V(0) = V_1 = 1$  – начальная скорость;  $k = 1.21$ ;  $T(0) = T_1 = 200$  – температура пленки на выходе из экструдера;  $T(l) = T_2 = 30$  – температура окружающей среды и на барабане. Результаты расчетов приведены на рис. 2 – 7.

На рис. 7 представлена зависимость ширины получающейся пленки от расстояния до выхода из экструдера, которая рассчитывалась по формуле:

$$a(x) = \frac{a_0}{\sqrt{v_x(x)}},$$

где  $a_0 = 25$  – ширина пленки на выходе. Из рисунка видно, что на этой зависимости существует участок постоянной ширины, а основное изменение ширины пленки происходит на расстоянии 20% – 30% от выхода, это так называемый эффект появления “шейки”, который не наблюдался бы без учета остывания пленки.

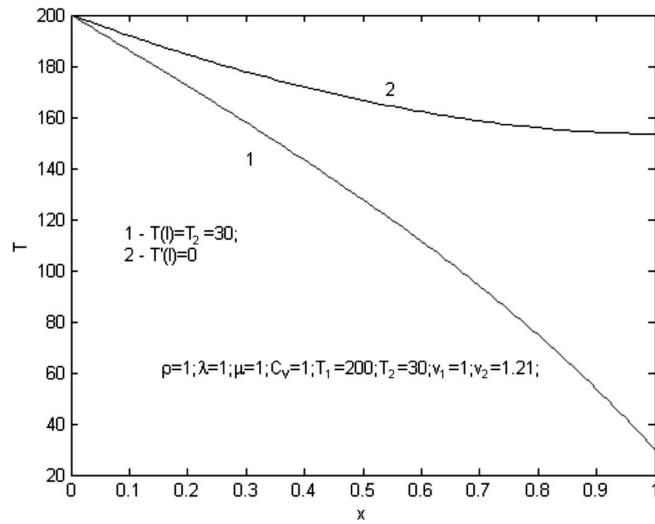


Рис. 2: Распределение температуры вдоль потока для различных типов граничных условий.

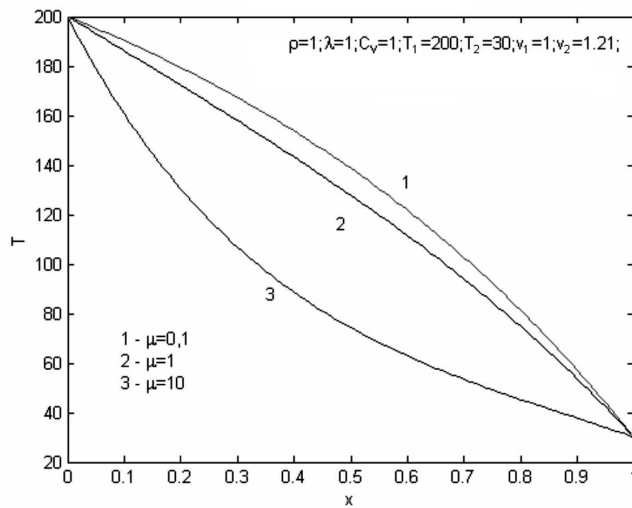


Рис. 3: Распределение температуры вдоль потока при различных значениях параметра  $\mu$  для первой краевой задачи.

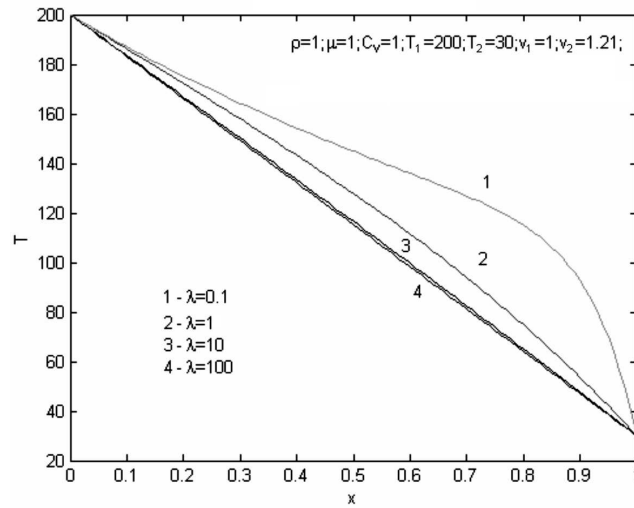


Рис. 4: Распределение температуры вдоль потока при различных значениях параметра  $\lambda$  для первой краевой задачи.

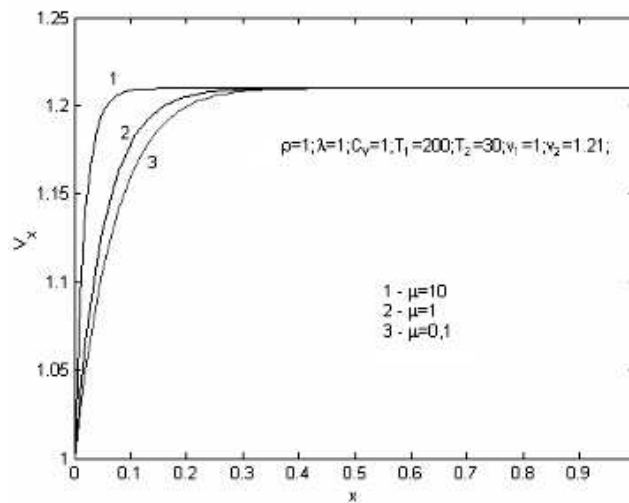


Рис. 5: Распределение скорости при различных значениях параметра  $\mu$  для второй краевой задачи.

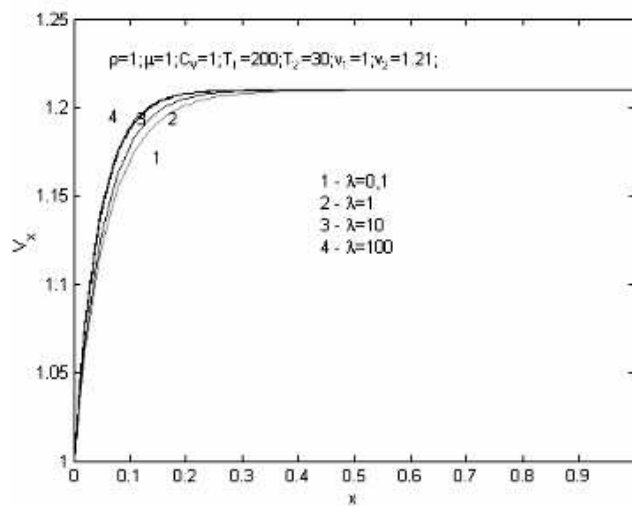


Рис. 6: Распределение скорости при различных значениях параметра  $\lambda$  для второй краевой задачи.

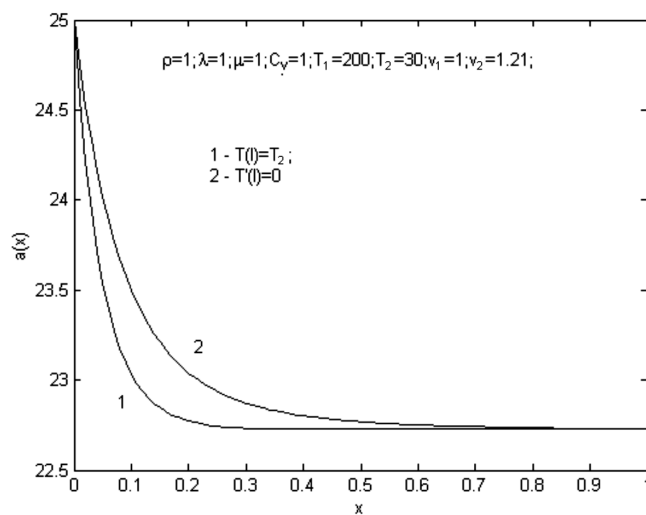


Рис. 7: Форма кромки пленки для различных типов граничных условий.



Таким образом, можно сделать вывод, что реологическая модель (1, 2) при учете теплообмена (3) непротиворечиво описывает наблюдаемые при формировании полимерных пленок эффекты [5], и полученные зависимости составляющих тензора напряжений от расстояния до выхода из экструдера могут быть использованы при моделировании процесса кристаллизации полимерного расплава под действием растяжения и охлаждения.

## Список литературы

- [1] *Пышнограй Г.В.* Определяющее уравнение нелинейных вязкоупругих (полимерных) сред в нулевом приближении по параметрам молекулярной теории и следствия для сдвига и растяжения / Г.В. Пышнограй, В.Н. Покровский, Ю.Г. Яновский и др. // Докл. АН. – 1994. – Т. 339. – №5. – С. 612–615.
- [2] *Янков В.И.* Процессы переработки волокнообразующих полимеров / В.И. Янков, В.П. Перевадчук, В.И. Боярченко. – М.: "Химия". 1989. 320 с.
- [3] *Виноградов Г.В.* Реология полимеров / Г.В. Виноградов, А.Я. Малкин. – М.: "Химия". 1977. 440 с.
- [4] *Пышнограй Г.В.* Микроструктурный подход в теории течения линейных полимеров и нелинейные эффекты на его основе / Г.В. Пышнограй, Ю.А. Алтухов // Высокомолекулярные соединения. Серия А. 1996. Т. 38. №7. С. 1185–1193.
- [5] *Silagy D.* Stationary and stability analysis of the film casting process / D. Silagy, Y. Demay, J.F. Agassant // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 79. 1998. P. 563-583.