

О СТАБИЛИЗАЦИИ ТЕЧЕНИЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ ПРОДОЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Проскурин А.В., Сагалаков А.М.

Алтайский государственный технический университет им. И.И.Ползунова, г. Барнаул

В работе рассмотрена устойчивость магнитогидродинамического течения в зазоре кольцевого сечения. Детально исследовано перезамыкание нейтральных кривых с образованием островка неустойчивости вблизи носика нейтральной кривой линейной теории.

1. Введение

Известно, что течения со стабилизацией продольным магнитным полем являются более сложным и содержательным объектом для численного анализа и теоретического изучения, чем просто течения в каналах [1-5]. В частности, в [4] обнаружено возникновение устойчивых автоколебаний в результате потери устойчивости магнитогидродинамического течения в кольцевом зазоре при наличии продольного магнитного поля. В работе [5] исследована тиринг-неустойчивость плазменного цилиндра, обнаружено мягкое возбуждение неустойчивости. Таким образом, внесение магнитного поля является хорошим способом стабилизации течений в том смысле, что при потере устойчивости ламинарного движения можно наблюдать возникновение вторичных движений. Такие системы доступны для численного анализа, исследование устойчивости ламинарных течений методом Ляпунова даёт более точные результаты, чем предсказание перехода к турбулентности в отсутствие магнитного поля.

В работе исследуется устойчивость течения проводящей жидкости в зазоре кольцевого сечения при наличии продольного магнитного поля. При исследовании устойчивости этого течения обнаружено перезамыкание нейтральных кривых линейной теории с образованием замкнутого островка неустойчивости. При увеличении числа Рейнольдса вновь наблюдается возникновение неустойчивости.

2. Постановка задачи

Рассмотренная конфигурация представляет собой два коаксиальных цилиндра, между которыми течёт электропроводящая жидкость. Магнитное поле однородно и направлено вдоль оси цилиндров, невозмущённое движение предполагается стационарным и параллельным с профилем скорости V , зависящим только от r

$$V = ar^2 + b \ln(r) + c, \quad (1)$$

$$a = \frac{2 \ln\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)}{1 + 2\xi - \left(1 + 2\xi + 2\xi^2\right) \ln\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)}, b = -a \frac{1 + 2\xi}{\ln\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)}, c = a \frac{(1 + 2\xi) \ln(\xi)}{\ln\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)} - a\xi^2,$$

где буквой ξ обозначен безразмерный радиус внутреннего цилиндра.

Движение жидкости и магнитное поле в ней определяются уравнениями магнитной гидродинамики

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} &= -\nabla\left(p + A\frac{H^2}{2}\right) + A(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} + \frac{1}{\text{Re}}\Delta\mathbf{V}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{H} &= (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{V} + \frac{1}{R_m}\Delta\mathbf{H}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{div}\mathbf{V} = 0,$$

$$\text{div}\mathbf{H} = 0,$$

где $A = \frac{Ha^2}{\text{Re}R_m}$ - число Альфвена, $Ha = \frac{dH_0}{c}\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$ - число Гартмана, $\text{Re} = \frac{V_0d}{\nu}$ - число Рей-

нольдса, $R_m = V_0d\frac{4\pi\sigma}{c^2}$ - магнитное число Рейнольдса, H_0 - напряженность продольного магнитного поля, V_0 - среднерасходная скорость, σ - электропроводность, c - скорость света, d - ширина зазора между цилиндрами, ν - вязкость.

В рамках линейной теории решения ищем в виде суммы параметров основного течения и малых добавок

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{V}_0 + \mathbf{v}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \\ p &= p_0 + p. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставив (3) в (2) и пренебрегая величинами второго порядка малости, получим систему уравнений для возмущений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + (\mathbf{V}_0\nabla)\mathbf{h} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{H}_0 &= (\mathbf{H}_0\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{h}\nabla)\mathbf{V}_0 + \frac{1}{R_m}\Delta\mathbf{h}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{V}_0\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{V}_0 &= -\nabla p - A\nabla(H_0h) + A(\mathbf{H}_0\nabla)\mathbf{h} + \frac{1}{\text{Re}}\Delta\mathbf{v}, \\ \text{div}\mathbf{v} &= 0, \\ \text{div}\mathbf{h} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Элементарное волновое решение этой системы будем искать в виде

$$(\mathbf{v}, \mathbf{h}, p) = \{\omega_r(r), \omega_\varphi(r), \omega_z(r), h_r(r), h_\varphi(r), h_z(r), q\}e^{i\alpha(z-Ct)+im\varphi}, \quad (5)$$

$\omega_r(r), \omega_\varphi(r), \omega_z(r)$ - компоненты амплитуды возмущения скорости, $h_r(r), h_\varphi(r), h_z(r)$ - компоненты амплитуды магнитного поля, q - амплитуда давления. Подставляя (5) в (4), получим

задачу на отыскание собственных значений $C = X + iY$ (комплексной фазовой скорости) для системы уравнений

$$\begin{aligned}
 D\omega_r &= -q' - Ah'_z + Ai\alpha h_r - \frac{1}{\text{Re}} \left(i\alpha\omega'_z + \frac{\gamma}{r} (r\omega'_\varphi) \right), \\
 D\omega_\varphi &= -\gamma q - A\gamma h_z + Ai\alpha h_\varphi + \frac{1}{\text{Re}} \left(\left(\frac{(r\omega_\varphi)'}{r} \right)' + \frac{2\gamma}{r} \omega_r \right), \\
 D\omega_z + \omega_r V'_0 &= -i\alpha q + \frac{1}{\text{Re}} \frac{(r\omega'_r)'}{r}, \\
 \Omega h_\varphi &= i\alpha\omega_r + \frac{1}{R_m} \left(\left(\frac{(rh_r)'}{r} \right)' - \frac{2\gamma}{r} h_\varphi \right), \\
 \Omega h_\varphi &= i\alpha\omega_\varphi + \frac{1}{R_m} \left(\left(\frac{(rh_\varphi)'}{r} \right)' + \frac{2\gamma}{r} h_r \right), \\
 \Omega h_z &= i\alpha\omega_z + h_r V'_0 + \frac{1}{R_m} \frac{(rh'_z)'}{r}, \\
 \frac{(r\omega_r)'}{r} &= -\gamma\omega_\varphi - i\alpha\omega_z, \\
 \frac{(rh_r)'}{r} &= -\gamma h_\varphi - i\alpha h_z, \\
 D &= i\alpha(V_0 - C) + \frac{m^2}{\text{Re}r^2} + \frac{\alpha^2}{\text{Re}}, \quad \Omega = i\alpha(V_0 - C) + \frac{m^2}{R_m r^2} + \frac{\alpha^2}{R_m}, \quad \gamma = \frac{im}{r}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Систему уравнений (6) после преобразований удобно представить в виде

$$V' = T_3 W + T_4 V, \tag{7}$$

$$W' = T_1 W + T_2 V, \tag{8}$$

где

$$W = \{r\omega_r, r\omega_\varphi, \omega_\varphi, rh_\varphi, rh_r\}, \quad V = \left\{ q, \frac{(r\omega_\varphi)'}{r}, r\omega'_z, h_z, \frac{(rh_\varphi)'}{r} \right\},$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & -i\alpha r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma}{r} & -\frac{i\alpha\left(\frac{2i\gamma^2}{R_m} - \frac{i\Omega'}{\alpha} - V_0'\right)}{\Omega} \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & -i\alpha r & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} -\frac{D}{r} & 0 & 0 & 0 & \frac{i\alpha A}{r} \\ \frac{2\gamma}{r^2} & \frac{D \operatorname{Re}}{r} & 0 & -\frac{i\alpha A \operatorname{Re}}{r} & 0 \\ V_0 \operatorname{Re} & 0 & D r \operatorname{Re} & 0 & 0 \\ \frac{R_m}{r} & 0 & 0 & 0 & \frac{i\Omega R_m}{\alpha r} \\ 0 & -\frac{i\alpha R_m}{r} & 0 & \frac{\Omega R_m}{r} & -\frac{2\gamma}{r^2} \end{pmatrix},$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\gamma}{\operatorname{Re}} & -\frac{i\alpha}{r \operatorname{Re}} & 0 & 0 \\ \gamma \operatorname{Re} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\alpha r \operatorname{Re} & 0 & 0 & -i\alpha A r \operatorname{Re} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i\gamma}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

с граничными условиями

$$\omega = 0, h = 0 \text{ при } r = \xi, \xi + 1.$$

3. Численный анализ

Спектральная задача (7), (8) решалась методом дифференциальной прогонки. При использовании данного метода исходная задача сводится к последовательности задач Коши для вспомогательной системы дифференциальных уравнений. Вблизи стенок канала схема дифференциальной прогонки выбиралась в виде

$$W = AV, \quad (9)$$

далее прогонка ведётся по схеме

$$V = A^{-1}W \quad (10)$$

навстречу со стыковкой в некоторой точке, где сформулировано дисперсионное соотношение. Здесь через A обозначена прогоночная матрица.

$$\det(A^+(C) - A^-(C)) = 0, \quad (11)$$

где знаками «+» и «-» обозначены значения прогоночной матрицы, полученные при интегрировании от различных границ канала. Обычно в качестве точки стыковки выбирается критическая точка r_c , в которой $V_0(C) = X$.

В работе [3] было обнаружено образование замкнутого островка неустойчивости. нами исследовано аналогичное перезамыкание нейтральных кривых, происходящее при увеличении числа Альфвена, при $P_m \sim 0.1$.

На рис. 1-3 представлены критические зависимости от $\text{Re}_*(P_m)$ при $A = 0.01$, $\xi = 1.3$, $m = 0,1,2$ соответственно. Они имеют сложный и необычный для задач гидродинамической устойчивости вид. Штриховкой обозначено расположение области неустойчивости. На данных рисунках привлекают внимание области устойчивости при $0.01 < P_m < 0.01$ для мод $m = 0,1,2$ и при $P_m \sim 1$ для мод $m = 0,1$, которые продолжают вплоть до чисел Рейнольдса, превышающих 10^6 .

Рисунки 4-8 иллюстрируют процесс образования замкнутых нейтральных кривых. При увеличении числа Альфвена «хвосты» нейтральных кривых перезамыкаются, от основной нейтральной кривой отщепляется замкнутая область неустойчивости. При дальнейшем увеличении числа Альфвена данная область неустойчивости уменьшается и стягивается в точку. Подобное поведение нейтральных кривых наблюдается также при увеличении магнитного числа Прандтля и объясняет появление «просветов» устойчивости на рисунках 1-3.

Список литературы

- [1] Велихов Е.П. Устойчивость плоского Пуазейлева течения идеально-проводящей жидкости в продольном магнитном поле.// ЖЭТФ – 1959, т.36, №4, с.1192-1202.
- [2] Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. – Новосибирск, 1977 – 366 с.
- [3] Сагалаков А.М., Сидоров Г.С., Тюлюпин Е.Н. Устойчивость Магнитогидродинамического течения Пуазейля в плоском канале с непроводящими стенками.// Магнитная гидродинамика – 1989 – с. 128-145.
- [4] Сагалаков А.М., Юдинцев А.Ю., Генерация магнитного поля при потере устойчивости магнитогидродинамического течения в кольцевой трубе.//Известия АГУ. 1996. - №1, с. 54-57.
- [5] Патудин В.М., Сагалаков А.М., Динамика Альфвеновских возмущений в неоднородной плазме: Барнаул: изд-во Алт. ун-та., 1998, 180 с.

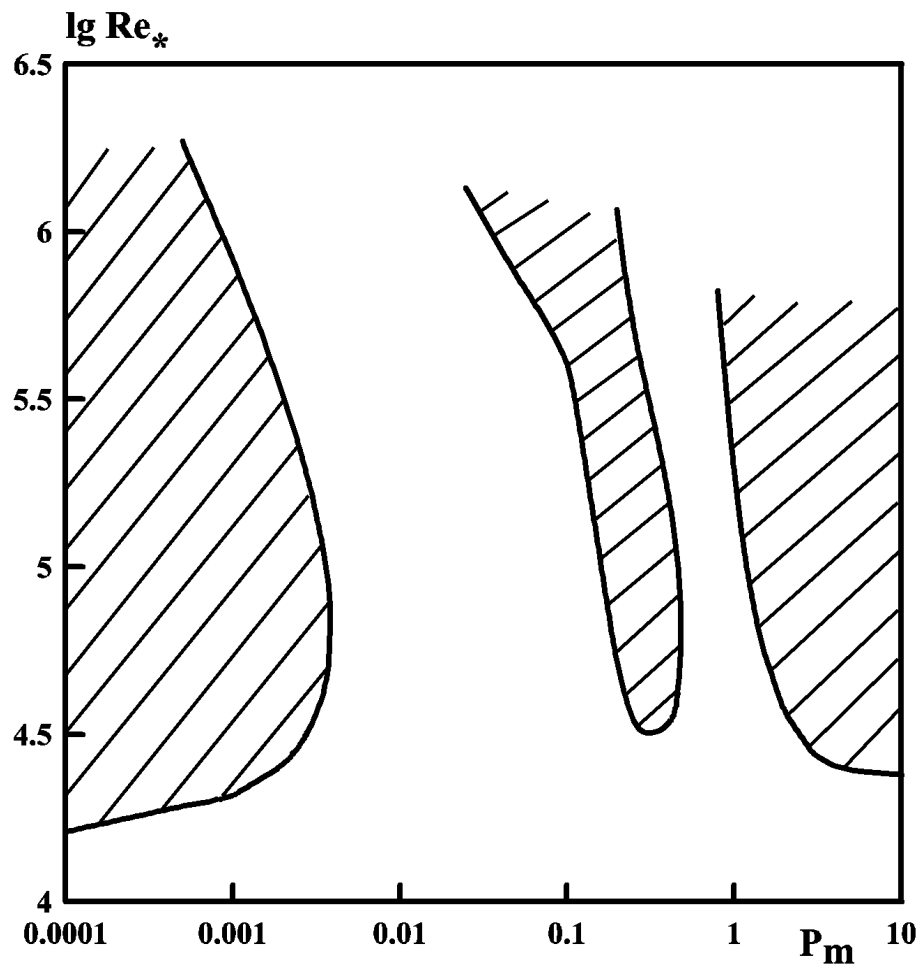


Рис.1. Зависимости $\text{Re}_*(P_m)$ при $\xi = 1.3$ и $A = 0.01$, $m = 0$.

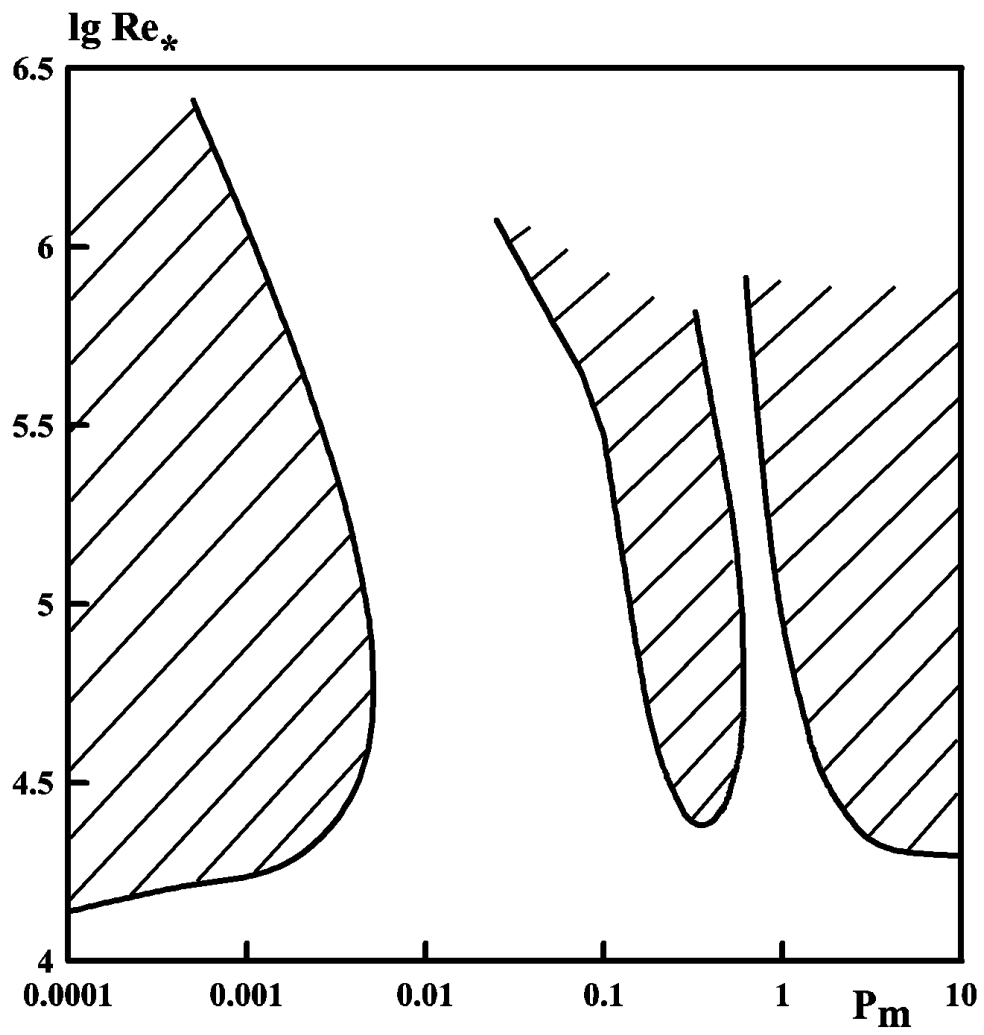


Рис.2. Зависимости $Re_*(P_m)$ при $\xi = 1.3$ и $A = 0.01$, $m = 1$.

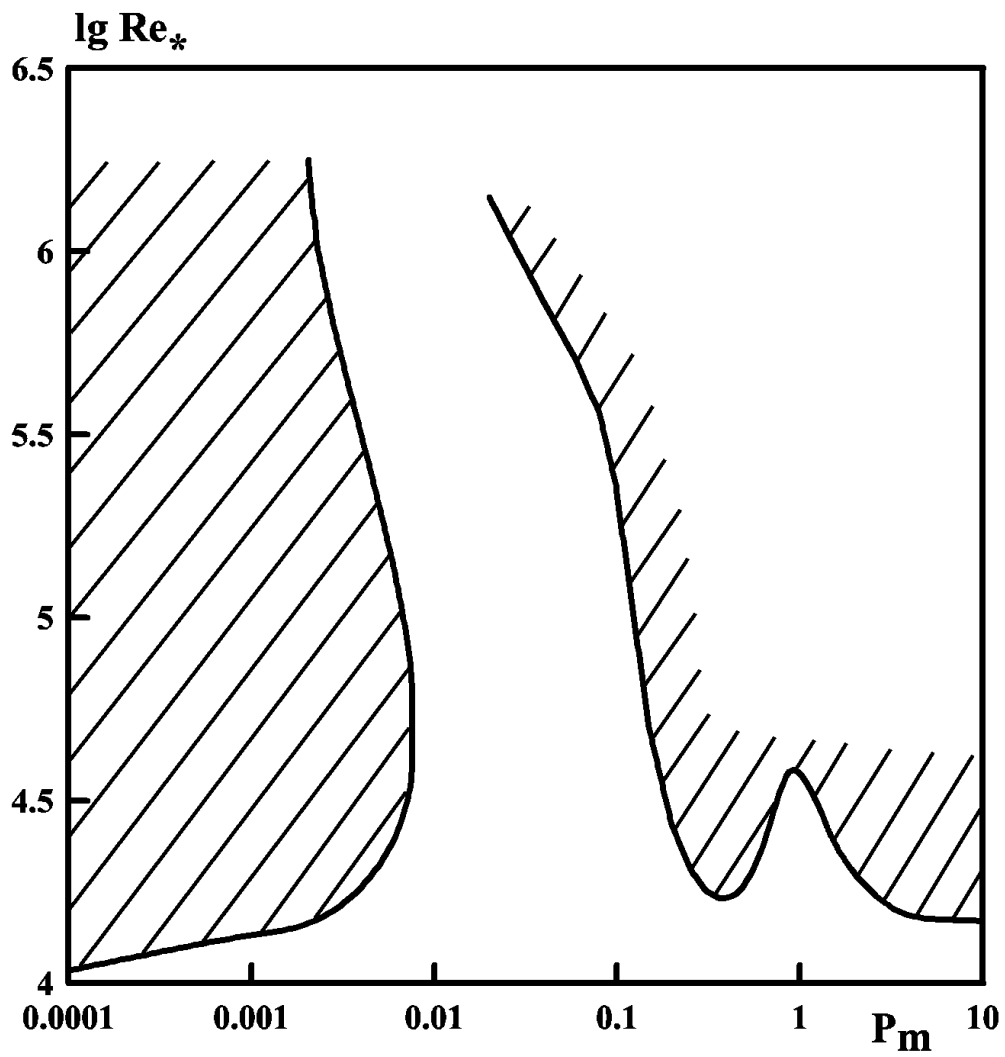


Рис.3. Зависимости $\text{Re}_*(P_m)$ при $\xi = 1.3$ и $A = 0.01$, $m = 2$.

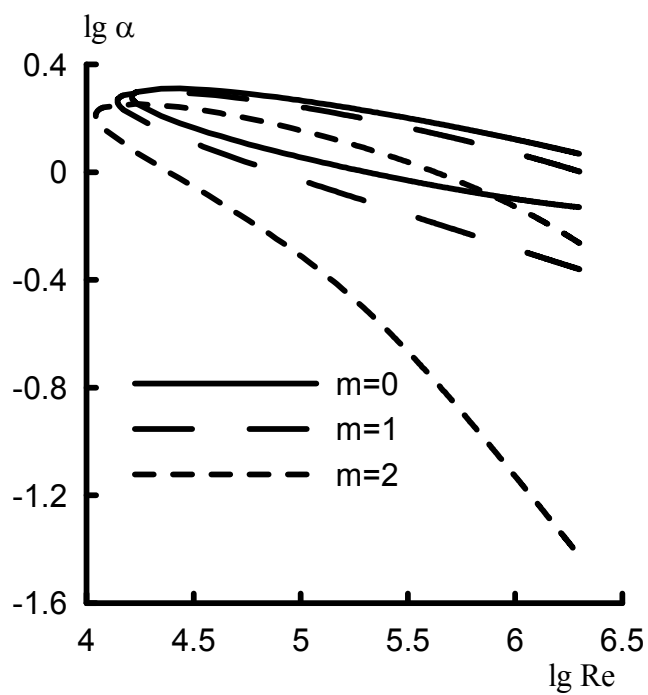


Рис.4. Нейтральные кривые для $P_m = 0.01$, $\xi = 1.3$, $A = 0.001$.

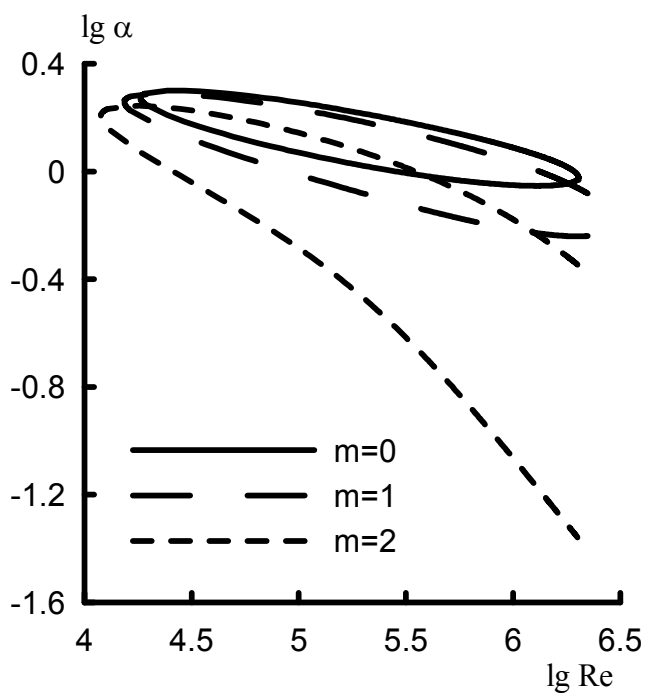


Рис.5. Нейтральные кривые для $P_m = 0.01$, $\xi = 1.3$, $A = 0.002$.

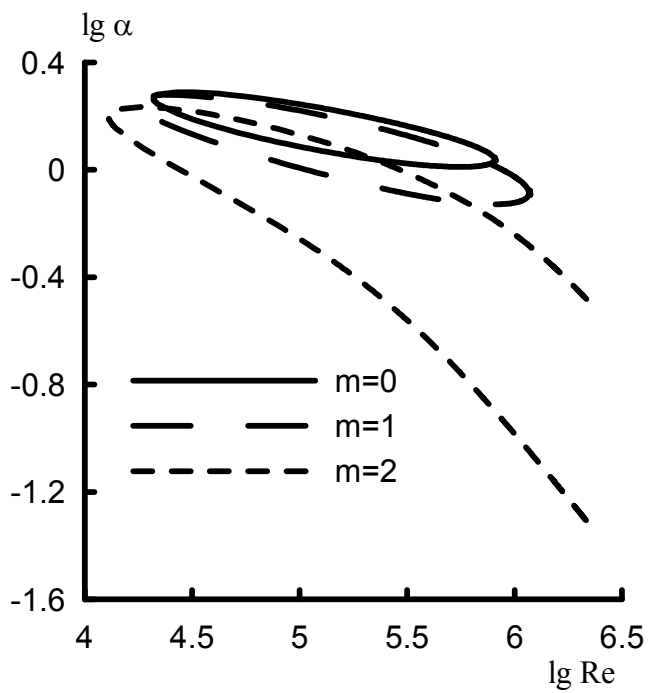


Рис.6. Нейтральные кривые для $P_m = 0.01$, $\xi = 1.3$, $A = 0.003$.

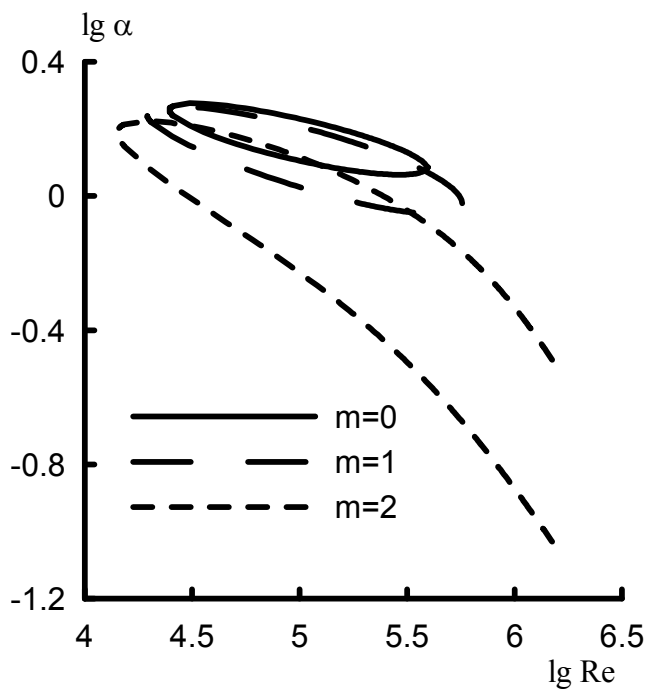


Рис.7. Нейтральные кривые для $P_m = 0.01$, $\xi = 1.3$, $A = 0.004$.

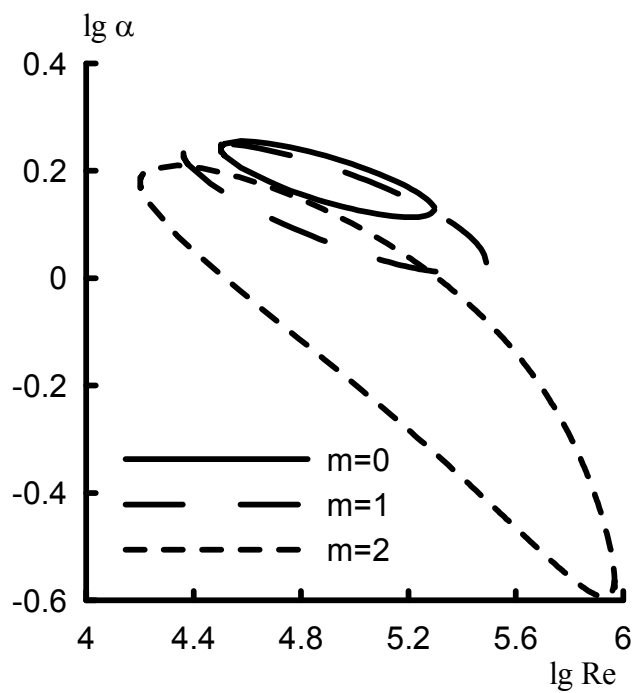


Рис.8. Нейтральные кривые для $P_m = 0.01$, $\xi = 1.3$, $A = 0.005$.