УДК 621. 43: 068. 4

СТРУКТУРНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ И ПРОБЛЕМЫ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Баранов В.А., Бразовский В.В., Эверт У.

Bundesanstalt für Materialforschung und – prüfung (BAM), Германия, Берлин

E - mail: altaikompozt@mail. ru

Аннотация. Рассмотрены новые методы исследования и реконструкции широкого класса физических объектов, типичных для неразрушающего контроля (НК), исходя из косвенной фрагментарной информации о них в форме изображений (например проекционных, как в рентгеновской вычислительной томографии (ВТ)). Методы основаны на выявлении в исходных изображениях различных “смысловых структур”, которые также являются изображениями и соответствуют определенным устойчивым свойствам объекта исследования как целого.

Ключевые слова: неразрушающий контроль, томография, структурные инварианты.

Введение

Структура в обыденном понимании это “строение” или “форма”. В науке же и философии структурой называется совокупность устойчивых связей и отношений в объекте, обеспечивающих его целостность и самотождественность при различных внешних и внутренних изменениях. Такое, более строгое, понимание складывалось постепенно и окончательно оформилось в конце XIX-ого столетия, сначала в химии, в связи с возникновением “теории химического строения”, а затем распространилось как в естественных, так и в гуманитарных науках. Именно так термин “структура” понимается и в “структурно-ориентированных методах” обработки изображений (ОИ). В структуре отражены интегративные свойства объекта (называемые также, системоприобретенными, холистическими или “эмерджентными”), которые не могут быть непосредственно “выведены” из свойств составляющих ее элементов. В рамках рассматриваемых методов они участвуют на правах унифицированных статистических гипотез о группе автоморфизмов изображения, отвечающей за “смысл” выявляемой структуры. Разработан теоретико-групповой статистический подход к решению “некорректно-поставленной” обратной задачи реконструкции изображения, позволяющий проверять эти гипотезы, оценивать инварианты группы и, таким образом, визуализировать структурно-функциональные связи в объекте. В силу их статистической устойчивости это возможно даже в том случае, когда объект “безнадежно” зашумлен. Структурно-ориентированные методы расширяют горизонты ОИ и позволяют решить многие задачи, которые раньше даже не могли быть поставлены, в частности многие актуальные практические задачи интроскопии и дефектоскопии.

Структурно-ориентированный подход к решению обратных некорректных задач

При математическом описании того или иного круга явлений важнейшую роль играет *математическая модель* [14]. Ценность модели в ее предсказательных возможностях. Она служит основой для разнообразных теоретических выводов, проверяемых затем экспериментально. Извлечение такого рода следствий называется решением *прямой задачи* [14]. Если же уточняется сама модель (например, корректируются ее функциональные и параметрические характеристики после сопоставления с экспериментальными данными), то говорят, что решается *обратная задача* [14]. Циклы усовершенствования модели, включающие поочередное решение прямых и обратных задач, могут повторяться много раз.

Строгая постановка "некорректно-поставленной" обратной задачи может быть достигнута в рамках структурного подхода на основе аксиоматического метода. В математике понятие "структура" применяется к множествам, природа элементов которых не определена. Чтобы определить структуру (не элементы) задаются соотношения, в которых находятся между собой элементы множества (т.н. *ти́повая характеристика* структуры), которые затем используются как *аксиомы структуры*.

При решении обратной некорректной задачи набор **A** аксиом ее структуры можно представить как пересечение наборов аксиом $\mathbf{A_O}$ и $\mathbf{A_S}$, где $\mathbf{A_O}$ это "постоянный" набор "объективных" утверждений, а $\mathbf{A_S}$ это "переменный" набор, внесенный субъектом исследования в качестве гипотез и предположений. Аксиомы $\mathbf{A_O}$ неявным образом ограничивают множество возможных решений исходной задачи (иногда для этого используют еще нестрогий термин "пространство решений"), а аксиомы **A** – некоторую более узкую проблемную область в этом множестве. Может получиться и так, что **A**. являются условиями решения одной-единственной корректной задачи.

Представление широких классов задач в форме дедуктивных систем ("исчислений") для математических наук традиционно. (Элементарная геометрия может служить в этом отношении классическим примером). В формулировке задачи (выступающей в форме "теоремы"), различают условие и заключение. Если условие недостаточно, то невозможно и однозначное заключение, т.е. в этом случае результат сводится к сужению класса решаемых задач. "Некорректная задача" с непротиворечивыми аксиомами $\mathbf{A_O}$ это исчисление, в рамках которого можно доказать множество теорем. Превратить ее в другую и корректную задачу можно вводя дополнительные предположения $\mathbf{A_S}$ таким образом, что содержанием нового суженного исчисления с аксиомами $\mathbf{A = (A_O \cap A_S)}$ будет одна-единственная теорема. Естественно, осуществить это можно многими способами.

В простейшем случае аксиомы $\mathbf{A_O}$ могут быть представлены самими исходными уравнениями задачи для конкретного объекта исследования (т.е. в них входят реальные экспериментальные данные, например, для ВТ это измеренные луч-суммы. Однако, этот набор аксиом может быть преобразован также в эквивалентный ему набор, например в тех случаях, когда задача решается на основе Фурье-методов в пространстве частот, на основе методов проекций на выпуклые множества [4], на основе методов нелинейного обратного проецирования [6, 7, 1-3] и т.д. Система исходных уравнений может быть преобразована в систему неравенств, как это делается, например, в методе минимальных проекций [6], где "пространство решений" представляет собой выпуклое множество. Кроме того, исходный набор данных может быть подвергнут предобработке с целью устранения его внутренней противоречивости т.е. возможной несовместности уравнений, возникающей благодаря зашумленности данных.

В структурно-ориентированных методах возможности набора аксиом $\mathbf{A_S}$ в сравнении с классическими исчислениями (среди которых геометрия – наиболее яркий пример) расширены и он может включать в себя предположения статистического характера, таким образом, на основе **A** можно делать *статистические выводы*. При решении некорректных задач на основе чисто детерминистского подхода математическая модель не обладает достаточной гибкостью. Аксиомы $\mathbf{A_O}$ и $\mathbf{A_S}$ часто оказываются несовместными, а при их совместности аксиомы $\mathbf{A_S}$ обычно малоинформативны. Для разработки наиболее эффективных методов решения важна статистическая совместность $\mathbf{A_O}$ и $\mathbf{A_S}$, также как и исследование различных форм статистической зависимости между ними. Подчеркнем, что такого рода статистические методы оказываются эффективными для решения очень широкого круга задач в первоначально детерминистской постановке, даже и вполне корректных задач. Естественно, для проверки статистических выводов требуется адекватный математический аппарат, и такой аппарат создан. (Проверяется соответствие статистической гипотезы $\mathbf{A_S}$ опытным данным $\mathbf{A_O}$ и оценивается степень этого соответствия).

Фундаментальным свойством структуры является то, что, будучи целым, она не меняется при определенных преобразованиях. Все изменения происходят на уровне элементов. Связи и отношения между элементами, которые при этом не меняются, называются *структурными инвариантами*. Основная задача как структурного подхода вообще, так и структурно-ориентированных методов это выявление и классификация таких инвариантов. В силу того, что структурно-ориентированный подход оперирует как детерминистскими, так и статистическими предположениями его задачей является также выявление устойчивых статистических характеристик, называемых иногда статистическими инвариантами.

В вычислительной томографии (ВТ) внутреннее строение объекта контроля “нарисовано” корнями системы линейных неоднородных уравнений, получающихся путем дискретизации исходных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Эти корни являются инвариантами задачи при всевозможных невырожденных линейных преобразованиях системы координат в конфигурационном пространстве с числом измерений равным числу дискретных элементов (пикселей или “вокселей”) томографического изображения. При решении различных уравнений и систем уравнений выявление инвариантов их преобразований оказывается чрезвычайно полезной процедурой. Во многих случаях (в особенности для некорректных задач) она способна даже заменить само решение, поскольку для выявления важнейших его свойств обычно необходимы далеко не все, а лишь некоторые из структурных инвариантов.

В дефектоскопии задачи ВТ и ОИ чаще всего бывают остро некорректными. По критерию Адамара задача корректна если решение 1) существует, 2) единственно, 3) устойчиво. На практике условие единственности “2)” обычно нарушено. Например, в трехмерных вариантах ВТ для восстановления скалярного поля “коэффициента линейного ослабления рентгеновского излучения” μ (x, y, z) в кубе с размерностями N*N*N т.е. при N^3 элементов дискретизации требуется N^3 уравнений. При этом для существования единственного решения матрица системы уравнений, содержащая N^6 элементов, должна быть невырожденной. Если K — количество ракурсов, то число измеренных луч-сумм - порядка KN^2. Таким образом, их доля по отношению к тому, что требуется для решения, составляет K/N. В малоракурсной томографии $K \approx 4\text{-}8$, тогда как $N \approx 512\text{-}1024$ т.е имеющиеся в наличии опытные данные составляют менее 1% от “идеала”. Если же измерения проведены “по полной программе” т.е. K = N, то стандартные вычислительные процедуры линейной алгебры для реконструкции бесперспективны т.к. с ростом N вычислительные затраты растут крайне резко (пропорционально N^9 т.е.даже при N < 512 число машинных операций уже приближается к числу Авогадро). Хорошие решения достигаются только при учете специфики задачи и всегда с учетом разреженности матрицы. Применение разнообразных других методов ВТ полностью этой “проблемы размерностей” не снимает, а лишь в той или иной степени смягчает ее. При этом возникают новые трудности. Проблемы, вызываемые плохой обусловленностью исходной обратной задачи, сплошь и рядом возникают также в ОИ, например, во всегда актуальной задаче реставрации “размытых” изображений, причем ответственная за размытие передаточная функция не всегда хорошо известна.. Оценка этой некорректной задачи в первом приближении также возможна в рамках дискретизированной линейной модели. Как исходное, так и результирующее изображения имеют размеры в пикселях N*N т.е. число уравнений, равное N^2, как будто бы достаточно для нахождения единственного решения. Но в данном случае не все в порядке с устойчивостью (усл. “3)”).. Матрица “размытия” содержит N^4, элементов, при этом наиболее активно она работает в пределах “скользящего окна” размерами (2M+1)*(2M+1), окружающего анализируемый элемент изображения, где M – полуширина окна. Чем больше M, тем ближе строки матрицы к линейной зависимости, тем хуже обусловлена задача и тем меньше надежды ее решить. (Уже слабых дополнительных шумов достаточно чтобы "столкнуть" задачу в область, где она не имеет единственного решения, т.е. усл. "2)" также нарушается).

При столь неутешительных выводах эффективная реконструкция в обратных задачах, где "некорректность" ярко выражена, все же вполне осуществима, если переключить внимание с "количества материала", ассоциируемого с данным элементом изображения, на структурно-функциональные связи этого элемента с другими элементами (которые могут быть выражены через соответствующие структурные инварианты). В силу своей интегративной природы эти связи устойчивы (включая и статистическую устойчивость). Они слабо меняются при различных изменениях объекта в широких пределах этих изменений, присутствуют даже в полуразрушенном объекте. В частности, они присутствуют и во фрагментарных исходных данных об объекте контроля, недостаточно полно представленным в информационном пространстве, чтобы восстановить материальный субстрат (инфраструктуру-носитель) этих связей. Если дефектоскописту доступен лишь 1% из полного набора луч-сумм для объекта, подлежащего томографической реконструкции, то восстановить поле μ (x, y, z) с той степенью подробности, которая достигнута в двумерных вариантах "медицинской ВТ", скорее всего, не удастся при какой угодно "априорной информации". Зато из этих данных он может извлечь гораздо более ценные результаты, сосредоточившись на структурно-функциональных связях и осуществляя синтетическую реконструктивную работу уже на другом уровне.

Обратим внимание еще на один принципиально важный аспект реконструкции. В ВТ обратное преобразование Радона (ОПР) [13] является своего рода идеологическим ядром. Оно дает общее решение задачи реконструкции – точное, но практически бесполезное. Поскольку решение Радона предельно неустойчиво, оно очень чувствительно к таким факторам как рассеяние излучения, сбои детекторов, изменение энергетического спектра излучения при прохождении через объект контроля и др., приводящим к погрешностям в исходных данных. Необходимое "количество" исходных данных здесь – не менее мощности континуума, причем должна быть обеспечена их идеальная полнота и сверхразрешение. Для корректного осуществления ОПР необходимо иметь в наличии радоновский образ объекта реконструкции – вектор из гильбертова пространства, тогда как исходные данные A_O представляют собой лишь "жалкую" проекцию этого вектора на конечномерное *пространство измерений*. Остаются неопределенными компоненты радоновского образа в бесконечномерном *нуль-пространстве,* ортогонональном пространству измерений. Никакими "экстенсивными мерами" этот недостаток не преодолевается и при конечном представлении (даже незашумленных) проекционных данных задача реконструкции остается некорректной, а исходные уравнения задачи определяют "целый мир". В структурно-ориентированном подходе мы исходим из того, что ОПР (как и его аналоги в ВТ и ОИ) это не решение некорректной задачи, а "призрак, указывающий цель". Оно очерчивает границы очень широкого проблемного поля, из которого могут быть выделены более узкие проблемные области, которые, в свою очередь, могут быть сужены до таких областей, в которых достигается полная алгоритмизация т.е. математическая модель такой области представляет собой решение одной-единственной корректной задачи. При этом гипотезы A_S (по-другому, "интегрирующие идеи", превращающие $A = (A_O \cap A_S)$ в условия решения корректной задачи) являются, вообще говоря, предположениями о каких-то свойствах решений некорректной задачи в нуль-пространстве.

В связи с отмеченными выше особенностями "точных аналитических решений" (типа ОПР и его аналогов), иногда говорят, что "решений некорректной задачи может быть много". Это не вполне верно т.к. решение задачи и ее постановка представляют собой единство.. Правильнее сказать, что исходная некорректная задача порождает множество других задач (проблемных областей). При этом переориентация с решения исходных уравнений на изучение каких-то их свойств может быть плодотворной и перспективной. Так поступил, например Пуанкаре в своей "качественной теории дифференциальных уравнений" (1880), заложив основы *теории динамических систем*. Но свойств объектов и явлений много и далеко не все они интересны для науки. Наибольшей привлекательностью, как с эстетической, так и с прагматической точки зрения обладают свойства устойчивого целого. Устойчивость же проявляется в том, что целое не меняется при определенных изменениях на уровне элементов, иначе говоря, целое это структура. Если наука начинает изучать какие-то "свойства", то обычно оказывается, что это инвариантные свойства какой-то структуры относительно определенных присущих ей преобразований. Конечно, это связано с тем хорошо известным фактом, что наука занимается не изолированными явлениями, а обширными классами явлений. "Закон природы" это устойчивость в круге изменчивых явлений. Его инвариантные преобразования ограничивают сферу его действия, указывая как на круг охватываемых им явлений, так и на условия применимости. То же самое можно сказать и об устойчивых интегративных свойствах различных систем (динамических, статистических, живых организмах и пр.). Их следует рассматривать вместе с инвариантными преобразованиями систем, при которых они остаются устойчивыми.

С этих позиций, правомерно ставить задачу A о выявлении на основе гипотез A_S скрытых в опытных данных A_0 "смысловых структур", где "смысл" ассоциируется с заложенными в A_S инвариантными преобразованиями и интерпретирующими их статистическими гипотезами, а "структура" определяется устойчивыми свойствами (структурно-функциональными связями) P_S, соответствующими этому смыслу. Решение задачи основывается на процедурах проверки статистической гипотезы.

При огромном разнообразии задач данного типа и, что особенно важно, при их разной направленности встает проблема разработки единой идеологической основы для решения всего спектра этих задач, для их сравнительного анализа и классификации. Увязывая смысл задачи с соответствующими ему инвариантными преобразованиями, структурно-ориентированный подход уже дает предварительное решение этой проблемы. Для ее окончательного решения (влекущего за собой и прагматические преимущества) он нуждается лишь в более развитом математическом формализме, что достигается следующими мерами: 1) Уточнение и формализация понятия "совокупности преобразований" как "группы преобразований". 2) Разработка конструктивных (статистических и теоретико-групповых) оценок для полей структурно-функциональных связей. 3) Установление однозначного соответствия между "смыслами" решений и группами преобразований. В этом случае классификация становится структурной (или "морфологической"), а математическая модель соответствует канонам научной объективности. Смыслы не могут быть изгнаны из содержательной теории (модели), поскольку вне интерпретации (или "понимания") ее формальных результатов не бывает продуктивного синтетического мышления. Однако, в силу субъективности и вариативности смыслов, между ними и формальными признаками не может быть взаимно-однозначного соответствия. Выражаясь точнее, это отношения гомоморфизма, а не изоморфизма.

Статистический подход к теоретико-групповые инвариантам

Среди различных свойств целого, пригодных для получения объективных знаний о мире, фундаментальное значение имеют свойства *подобия* между целостностями и *самоподобия* целого. С математической точки зрения подобие это *отношение эквивалентности*. Оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Иными словами, это равенство между объектами в каких-то аспектах (по каким-то характеристическим признакам). Преобразование объекта в подобный ему объект называется *преобразованием подобия*.

Понятием, уточняющим понятие “подобие”, в современной математике является *изоморфизм*. Системы $\mathbf{C_1}$ и $\mathbf{C_2}$ называются изоморфными, если между их элементами, а также определенными на них функциями, связями и отношениями может быть установлено взаимно-однозначное соответствие. Более подробно: 1) Каждому элементу $\mathbf{c_1}$ из $\mathbf{C_1}$ соответствует элемент $\mathbf{c_2}$ из $\mathbf{C_2}$ (*образ элемента* $\mathbf{c_1}$) и наоборот. 2) Каждой функции $\mathbf{f_1}$, определенной на элементах системы $\mathbf{C_1}$ и принимающей значения на элементах системы $\mathbf{C_2}$, соответствует единственная функция $\mathbf{f_2}$ и наоборот функции $\mathbf{f_2}$ в $\mathbf{C_2}$ соответствует единственная функция $\mathbf{f_1}$ в $\mathbf{C_1}$. 3) Для каждого свойства (связи, отношения) $\mathbf{P_1}$, объединяющего элементы из $\mathbf{C_1}$ в наборы, для образов этих элементов в $\mathbf{C_2}$ существуют взаимно-однозначно соответствующие им свойство $\mathbf{P_2}$. Система $\mathbf{C_2}$ называется изоморфным образом $\mathbf{C_1}$ и наоборот. Если в “1)” однозначное соответствие выполняется только в одном направлении (от $\mathbf{C_1}$ к $\mathbf{C_2}$) то $\mathbf{C_2}$ называется *гомоморфным образом* $\mathbf{C_1}$, а $\mathbf{C_1}$ *гомоморфным прообразом* $\mathbf{C_2}$. Изоморфизм некоторой системы элементов на себя называется *автоморфизмом*. Изоморфизм замечателен тем, что выделяет из систем структурное ядро. Между структурными инвариантами двух изоморфных систем имеется взаимно-однозначное соответствие. Аксиомы любой математической модели всегда определяют систему объектов, изучаемую ею, только с точностью до изоморфизма т.е эти аксиомы всегда “аксиомы структуры”. Интерпретаций же этого структурного ядра в рамках моделей (и связанных с ними “смыслов”) может быть много.

При решении некорректной задачи гипотеза $\mathbf{A_S}$, отвечающая за вычленение из исходной задачи с аксиомами $\mathbf{A_O}$ некоторой субзадачи реконструкции определенной “смысловой субструктуры” с аксиомами $\mathbf{A}$, может быть задана совокупностью автоморфизмов этой субструктуры.. Как видно из определения изоморфизма (“2)”, “3)”), структурно-функциональные связи присущие данной “смысловой субструктуре” могут быть заданы явно. Поскольку автоморфизм, рассматриваемый как преобразование подобия, устанавливает рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение он является *обратимым преобразованием* (что очевидно из определения изоморфизма). Такие преобразования образуют *группу*, что легко проверить. Определим бинарную групповую операцию как композицию автоморфизмов, т.е. если $\mathbf{g_1}$ и $\mathbf{g_2}$ – автоморфизмы, то $\mathbf{g_3} = \mathbf{g_1}\,\mathbf{g_2}$ тоже автоморфизм. Очевидно, что 1) $(\mathbf{g_1}\,\mathbf{g_2})\,\mathbf{g_3} = \mathbf{g_1}\,(\mathbf{g_2}\,\mathbf{g_3})$. 2) Существует тождественное преобразование $\mathbf{e}$ такое, что для любого автоморфизма $\mathbf{g}$ справедливо $\mathbf{g} = \mathbf{eg} = \mathbf{ge}$. 3) Для любого автоморфизма $\mathbf{g}$ существует обратный к нему автоморфизм $\mathbf{g}^{-1}$ такой, что $\mathbf{g}^{-1}\,\mathbf{g} = \mathbf{g}\,\mathbf{g}^{-1} = \mathbf{e}$. Эти условия совпадают с определением группы. Из неполной совокупности автоморфизмов группу легко получить как ее “оболочку” путем композиций с учетом “1) – 3)”. Группу автоморфизмов, связанную с гипотезой $\mathbf{A_S}$ будем обозначать как $\mathbf{G_S}$. Она уточняет понятие “совокупности преобразований” и является адекватным формальным инструментом для унификации подхода к различным проблемным областям $\mathbf{A}$, порождаемым исходной некорректной задачей $\mathbf{A_O}$. Иными словами, в рамках структурно-ориентированного подхода проблемных областей ровно столько, сколько существует групп $\mathbf{G_S}$ т.е. на основе множества таких групп осуществляется структурная классификация этих областей, включая алгоритмизируемые области для корректных задач.

Теория групп [15] является наиболее адекватной математической теорией для описания самоподобия различных объектов, для их структурного анализа, сравнительного анализа и классификации. Как известно, даже происхождение этой теории связано с точной классификацией Галуа решений алгебраических уравнений в радикалах. Позднее Ли проделал похожую работу для дифференциальных уравнений, а Клейн применил теоретико-групповую идеологию для классификаций различных “геометрий” (*Das Erlanger Programm*, 1872). Впечатляющим примером теоретико-группового анализа (исторически первым применением теории групп непосредственно в естествознании) было полное описание всевозможных кристаллических структур и теоретический вывод

Федоровым в 1890 г. 230 пространственных групп (т.н. *федоровские группы*). Пуанкаре был первым, кто стал применять теоретико-групповые методы для исследования таких объектов как "законы природы", прежде всего для уравнений Максвелла. На рубеже XIX-ого и XX-ого столетий теория групп была использована в качестве образца для перестройки математики. Фундаментальная роль и высокая эффективность этой теории для инвариантного описания различных объектов (как абстрактных, так и конкретных) в современной теоретической физике общеизвестна. Начиная со второй половины XX-ого столетия, теория групп все в большей степени применяется и для структурных исследований вне физики.

Особенностью и новацией "структурно-ориентированного подхода" является последовательное сближение теоретико-групповых методов со статистическими методами. Это актуально, поскольку симметрия в природе редко бывает проявлена "в чистом виде". Любое явление образовано действием множества факторов, каждый из которых, так или иначе, оставляет в нем свой "след" в форме какой-то субструктуры – явной или (чаще всего) скрытой. Явление, таким образом, предстает перед нами как "смесь" разнородных субструктур. Поэтому возникает необходимость их разделения на основе присущих им "симметрий" и "инвариантностей". Статистические методы для этой цели наиболее эффективны. При выявлении отдельной субструктуры все остальные "конкурирующие" субструктуры играют роль "смысловых шумов" и статистически подавляются. Основным формальным инструментом для выделения субструктур является группа преобразований $\mathbf{G_S}$. На ее основе создается структурный фильтр с благоприятными условиями прохождения через него для выделяемой субструктуры и неблагоприятными для всех остальных.

Особенностью и новацией предлагаемого "структурно-ориентированного подхода" является последовательное сближение теоретико-групповых методов со статистическими методами. Сформулированные на языке теории групп инвариантные свойства объектов (например, изображений), систематически рассматриваются как *статистические гипотезы*. Развита адекватная математическая техника для проверки этих гипотез и оценки структурных инвариантов. Существование группы автоморфизмов объекта исследования оценивается статистически, в связи с чем разработаны и введены в употребление *меры сходства* и *меры различия* для оценки такой неточности [6, 7, 3, 2], являющиеся *неклассическими статистиками,* выводимыми на основе нелинейного обратного проецирования. Используются и традиционные методы математической статистики, таким образом создается аппарат статистической поддержки структурных инвариантов. В структурно-ориентированных методах группа автоморфизмов $\mathbf{G_S}$ является базисом для конкретной статистической гипотезы $\mathbf{H_S}$. (Иными словами, "фундаментом" решения всегда служат инварианты группы $\mathbf{G_S}$, однако путей для их оценки может быть много. Гипотеза $\mathbf{H_S}$ детализирует способ оценки на уровне конкретной вычислительной процедуры). Поскольку с группой $\mathbf{G_S}$ могут быть связаны многие гипотезы $\mathbf{H_S}$, то классификация задач на основе $\mathbf{H_S}$ – более детальная, чем на основе $\mathbf{G_S}$, а соответствие ($\mathbf{H_S} \rightarrow \mathbf{G_S}$) является гомоморфизмом.

Подчеркнем некоторые особенности статистического теоретико-группового подхода к решению обратных задач. Разнообразие групп преобразований $\mathbf{G_S}$ для выявления структурно-функциональных связей $\mathbf{P_S}$ очень широкое и в общем случае группа $\mathbf{G_S}$ не совпадает с группой преобразований исходных "материальных", обычно линейных (например, для μ (x, y, z) в ВТ) уравнений. Если $\mathbf{G_S}$ применяется локально, например в окрестности каждой точки изображения, то визуализируемые "поля струкутурно-функциональных связей $\mathbf{P_S}$" (скалярные, векторные и пр) не выражаются через материальные характеристики (вроде μ (x, y, z)), а описываются статистическими характеристиками – функциями (обычно нелинейными) элементов в окрестности.

Для нормированных нелинейных статистик ("мер сходства" и др) вводится такая характеристика как "коэффициент жесткости" Г – аналог множественного коэффициента корреляции. Поскольку в общем случае гипотеза $\mathbf{A_S}$ является статистической и теоретико-групповой для решения задачи (т.е для выявления статистических теоретико-групповых инвариантов) достаточно статистической совместности $\mathbf{A_0}$ и $\mathbf{A_S}$, являющейся более слабой формой взаимосвязи, чем жесткая детерминисткая зависимость. При этом $\Gamma \leq 1$. При $\Gamma = 1$ взаимосвязи наиболее жесткие, соответствующие детерминистской модели, иначе говоря, при $\Gamma \rightarrow 1$ статистическая модель выявления теоретико-групповых инвариантов вырождается (по принципу соответствия Бора) в классический теоретико-групповой структурный анализ. При всех своих достоинствах классические методы плохо приспособлены для синтеза т.е. для решения обратной задачи распознавания и визуализации “смысловой структуры”, определяемой группой $\mathbf{G_S}$. Что, собственно говоря, делает симметрию $\mathbf{G_S}$ в $\mathbf{A_O}$ неточной? Конечно, обычные приборные шумы, но более всего помехи от других “смысловых структур” т.е. “смысловые шумы”. Статистический подход дает средства как для их прямого подавления, так и для эффективных оценок выделяемой структуры. Степень жесткости Γ высока, например, при реставрации слабо зашумленных изображений. Она становится еще выше если доступна серия таких изображений (например, с быстродействующей ПЗС-камеры). Она высока, когда при формировании изображения хорошо известны характеристики шума, точно известна передаточная функция и т.п., но в особенности, если отсутствуют мешающие “смысловые структуры”. В этих случаях мы имеем с “почти-корректными” исходными задачами. Очень жесткими являются взаимосвязи в статистической физике. “Выборки” для оценки распределений в ней очень мощные, поэтому, в отличие от математической статистики, она фактически не нуждается в таком понятии как “статистическая гипотеза”.

Группы преобразований объекта исследования описывают объект с разной степенью подробности. Чем богаче группа, тем беднее логическим содержанием сам объект (т.е. тем проще его структура). Однако, такого рода “бедность” вовсе не совпадает с ценностью. Для дефектоскописта, например, не слишком важен весь огромный, доставляемый ВТ, массив информации о “внутреннем строении объекта”, в котором легко потеряться.. Для него важна структура дефектов этого объекта, точнее *карта дефектности*. Все остальное – где-то на уровне смыслового шума. В первом случае много информации по Шеннону и мало смысловой (семантической) информации. Во втором случае ситуация обратная, иначе говоря, статистический теоретико-групповой подход хорошо приспособлен для работы в “смысловых координатах” дефектоскописта. .

Если группа $\mathbf{G_S}$, описывающая неточную симметрию изображения $\mathbf{I_0}$ (или отдельных его участков) является финитной группой $\mathbf{G_S}$ порядка N, то в результате действия автоморфизмов $\mathbf{g_0} = \mathbf{e}$, $\mathbf{g_1}, \ldots, \mathbf{g_{N-1}}$ возникает N изображений $\mathbf{I_0}, \mathbf{I_1}, \ldots, \mathbf{I_{N-1}}$, которые мы называем внутренними ракурсами изображения $\mathbf{I_0}$. Задача обработки изображения $\mathbf{I_0}$ обнаруживает в этом случае глубокое родство с томографическими задачами. В частности, для задач ОИ могут быть применены все математические методы, развитые для нелинейного томосинтеза [1-7], включая как методы нелинейного обратного проецирования [6], методы проекций на выпуклые множества [4], так и методы фильтрации (предобработки проекций и постобработки томограмм). Автоморфизмы группы $\mathbf{G_S}$ не обязательно действуют в пространстве изображений $\mathbf{R_I}$, а, например, в некотором пространстве $\mathbf{R_T}$, куда изображение $\mathbf{I_0}$ отображено интегральным преобразованием $\mathbf{T}$. В этом случае набор внутренних ракурсов будет выглядеть как $\mathbf{I_0}$, $\mathbf{T^{-1}g_1TI_0}$, $\mathbf{T^{-1}g_2TI_0}$, …, $\mathbf{T^{-1}g_{N-1}TI_0}$,. В нелинейном томосинтезе внутренние ракурсы проекций могут быть использованы точно так же как и сами проекциии т.е. обычные “внешние” ракурсы. Если при синтезе доступны M проекционных изображений, то общее число доступных ракурсов будет равно MN. Понятно, что этим достигается резкое повышение качестаа синтезируемых томограмм. Появляется также больше возможностей для ориентированного синтеза т.е. для томографической визуализации структурно-функциональных связей определенного типа.

Объект контроля, описываемый условиями исходной некорректной задачи $\mathbf{A_0}$ может иметь очень широкий семантический спектр. Для эффективного разделения мешающих друг другу ”смысловых слоев” (точнее, для их гомоморфных образов т.е. “смысловых структур”) может быть применена точно такая же математическая техника, какая используется для “разделения слоев” в нелинейном томосинтезе (Конечно, в ОИ она применяются исключительно к “внутренним” ракурсам). По существу, томосинтез [6, 7] – первый метод визуализации структурно-функциональных связей по описываемой нами методике. (Заметим, что при ограниченных углах обзора строить алгоритмы томосинтеза, направленные на реконструкцию материальных характеристик типа μ (x, y, z) бессмысленно).

Особое значение для структурно-ориентированной ОИ имеют методы с использованием “локальной симметрии структурно-функциональных связей” изображения, описываемой “группой локальной симметрии” $\mathbf{L_S}$ [11, 7]. Это *группа Ли*, в вырожденных случаях — конечная группа. Если предположить, что первоначальное, еще неразрушенное (в частности, разного рода шумами) изображение представляет собой гладкое *многообразие*, то для него в бесконечно малой окрестности каждой точки применимы соображения *геометрии в малом*. Структурные инварианты являются в этом случае инвариантами относительно автоморфизмов групп Ли. При разрушениях объекта его топология, конечно, также нарушается. Тем не менее, если степень разрушения не превышает некоторого “порога необратимости”, то инварианты продолжают еще сохраняться в видоизмененной деградированной форме, — не в бесконечно малой, а в некоторой конечной окрестности элемента изображения, где они могут быть восстановлены на основе теоретико-групповых статистических методов. Группа $\mathbf{L_S}$ предназначена как раз для неявного (на основе ее автоморфизмов в этой окрестности) описания этих инвариантов.

Подход к ОИ, основанный на концепции “локальной симметрии” позволил разработать широкий круг структурно-ориентированных методов, работающих как непосредственно в пространстве изображений, так и с использованием интегральных преобразований. Они могут быть также встроены как существенный компонент в алгоритмы томографической реконструкции и вообще могут быть использованы при решении разнообразных некорректных задач, в частности для их “локальной структурной регуляризации”.

Структурно-ориентированная обработка проекционных изображений железобетонной стены

Рассмотрим некоторые конкретные примеры применения структурно-ориентированных методов ОИ на практике. (Ограниченные рамки данной публикации не позволяют нам рассмотреть примеры томографической реконструкции на основе данного подхода. Описания некоторых из структурно-ориентированных томографических методов будут развернуты в серии последующих статей).

Одной из трудных и актуальных задач, вставших перед “Федеральным институтом по контролю и исследованию материалов” в Берлине (“BAM-Berlin”) был радиационный контроль строительных конструкций с последующей томографической визуализацией [7]. В течение ряда лет в этом направлении в “БАМ”е осуществлялась широкая программа исследований, проводившаяся при технической поддержке Fuji Film Europe (Дюссельдорф, Германия) и ее “европейского директора” д-ра М.Калинга.

В задаче томографической реконструкции внутреннего строения железобетонной стены с ограниченным доступом (участок старого моста) для регистрации радиографических проекций использовались источник излучения на основе Co^{60} и фотолюминесцентные экраны с биомедицинской системой BAS2000 (Fuji Film). Геометрия подсистемы измерения проекционных данных - копланарная (как в классическом томосинтезе). Было зарегистрировано 14 проекционных изображений. Проекции размером 400 мм. * 800 мм регистрировались на сдвоенных фотолюминесцентных экранах, размером 400 мм. * 400 мм. Пространственное разрешение – 10 пар.лин./мм. Толщина стены - 400 мм. Расстояние от экрана до плоскости источника - 1000 мм. Источник последовательно смещался вдоль прямой линии в плоскости источника (с шагом 200 мм) в направлении, перпендикулярном стальным стержням в железобетоне.

В качестве математического подхода к томографической реконструкции стены нелинейный томосинтез [1-3, 5, 6] был вполне адекватен проблеме, однако благодаря шумам, вызываемым рассеянным излучением, потребовались существенно новые методы предобработки проекций. Предложенный для этой цели метод структурно-ориентированной фильтрации, основанный на “локальной симметрии”, оказался успешным. При этом было исследовано несколько вариантов метода, в принципе приводящие к одним и тем же результатам. При всем разнообразии вариантов эти методы часто можно представить в традиционной форме алгоритма пространственной фильтрации со “скользящим окном”, общая схема которого знакома и привычна большинству “потребителей” программного обеспечения для ОИ.. При этом возникает квазитомографическая задача для оценки микроизображения внутри окна. Для непрерывной группы “число” внутренних ракурсов континуально-бесконечно, однако в конкретных практических алгоритмах используется какое-то конечное подмножество из них. По их набору оцениваются характеристики элементов изображения внутри окна, чаще всего это результирующая яркость центрального элемента.

В строительных конструкциях “вторичные элементы”, отвечающие за определенные структурно-функциональные связи, представляют собой протяженные образования. Им соответствует и определенная материальная субструктура (арматура в бетоне). Если такие вторичные элементы не дают никакого вклада в проекционное локальное изображение внутри скользящего окна, то данное изображение в пределах статистической значимости уместно считать изотропным. В противном случае возникают значимые отклонения от изотропности, отождествляемые с инцидентностью “вторичного элемента” центральному элементу микроизображения.

В данном случае группой локальной симметрии $\mathbf{L_S}$ (или “теоретико-групповым фильтром”) служит группа вращения (называемая также группой SO (2)) локального изображения вокруг центрального элемента. Она описывает фон, “пустое пространство” без сигнала. Все элементы исходного изображения, рассматриваемые как центры локальных микроизображений, и удовлетворяющие локальной изотропии “равны” между собой. Напротив, статистически значимая анизотропия свидетельствует о появлении “смыслового сигнала” (т.е. вторичного элемента, например, арматуры, в других случаях “дефекта”, допустим фрагмента трещины и.т.п.). Здесь применимы слова П.Кюри “диссимметрия творит явление”, сказанные им по другому поводу. Отклонения от нормы реже чем норма, их “информационная нагруженность” выше, поэтому естественно строить алгоритм распознавания таким образом, что симметрия описывает “фон” и “норму”, т.е. наиболее вероятное и тривиальное из того, что может произойти. Наличие симметрии рассматривается, таким образом, как нулевая теоретико-групповая статистическая гипотеза, а появление “вторичного элемента”, как альтернативная гипотеза.

Рассмотрим один из алгоритмов распознавания анизотропии этого класса (с вычислительными затратами близкими к минимальным). В нем все выборочные статистики вычисляются на некоторых подмножествах локального изображения, а именно вдоль прямых линий, проходящих через центральный элемент. Рассматривались N различных фиксированных направлений, соответствующих N группам данных для этих подмножеств. Для определенности предположим скользящее окно квадратным с полушириной M. Пусть p_{ij} - яркость элемента исходного изображения, r_{ij} - яркость элемента итогового изображения (i = 1, 2,...,I, j = 1,2,...,J, где I и J — размерности изображения), n (n = 1, 2,..., N) номер произвольного направления, a_{1ij}, a_{2ij}.,... a_{Nij} - средние значения и q_{1ij}, q_{2ij}.,... q_{Nij} - среднеквадратичные в N группах данных (при вычислении этих значений центральный элемент не принимался во внимание). (Для того, чтобы в дальнейшем не делать формулы громоздкими индексы i и j будут опущены). Рассмотрим параметр n как фактор, предположительно влияющий на средние значения a_1, a_2.,... a_N,. В соответствии с основными принципами дисперсионного анализа может быть построена статистика (F- отношение Фишера, т.е. межгрупповая дисперсия, поделённая на общую внутригрупповую) с N-1 и N(2M-1) степенями свободы:

$$F = \frac{N(2M-1)}{(N-1)2M} \frac{\sum_{n-1}^{N} (a_n - \frac{1}{N} \sum_{l-1}^{N} a_l)^2}{\sum_{n=1}^{N} (q_n^2 - a_n^2)} \quad (1)$$

так что итоговое изображение описывается как (1). (Более точно, к (1) может быть применено некоторое нелинейное преобразование f типа "look-up-table" так, что r_{ij} = f (F_{ij}) чтобы обеспечить приемлемую для человеческого глаза гистограмму яркости). Итоговое изображение, таким образом, “рисуется” статистикой Фишера, являющейся в данном случае мерой различия между средними по различным направлениям. Таким образом, в данном подходе предполагалось, что та же самая статистика, на основе которой отвергается или принимается гипотеза, может быть использована также как количественная мера отклонения от точной симметрии (здесь от изотропии) и служить как характеристика яркости результирующего изображения.

На рисунке 1. представлены результаты структурно-ориентированной фильтрации с привлечением оценки (1) дисперсионного анализа при N = 4 и M = 32. Слева (a) — нефильтрованная, справа (b) — фильтрованная проекции. “Черное” на фильтрованной проекции справа соответствует тем областям, где “нулевая” теоретико-групповая гипотеза (в данном случае предположение об изотропности микроизображения в “локальном пятне” вблизи исследуемого “центрального элемента) не отвергается. Напротив, “белое” — это свидетельства статистики Фишера о неправомерности нулевой гипотезы при различных уровнях значимости.

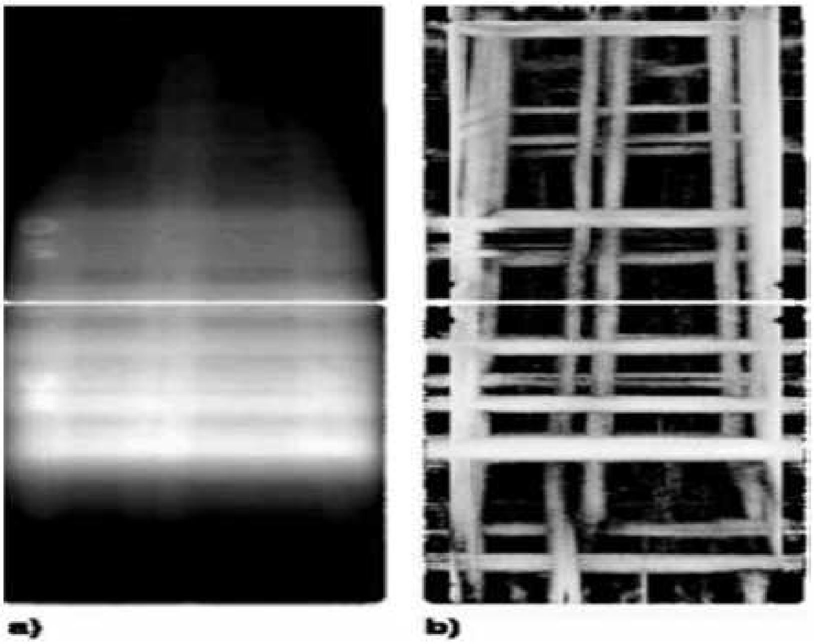

Рисунок1 .Структурно-ориентированная фильтрация проекции железобетонной: стены. (Слева (a) – исходная проекция, справа (b) – отфильтрованная проекция).

При контроле железобетонных конструкций [7, 11]. структурно-ориентированная фильтрация полностью (даже без томографии) решает практическую проблему поставленную “заказчиком” т.е. инженерами строителями, осуществляющими надзор за сооружениями. Отметим, что соответствующая математическая задача – некорректная в острой форме, когда даже сам “оператор размытия” исходного незашумленного изображения если и известен, то весьма приблизительно. Фактически, в качестве его параметра использовалась только полуширина окна М. Разными авторами предпринимались также попытки решить эту задачу (т.е. фильтрацию предельно зашумленных проекций) на основе хорошо известных и новых методов обработки изображений (модифицированная инверсная фильтрация, “Wavelets”, процедуры, основанные на соображениях теории фракталов), однако они не привели к позитивному рзультату. В исходном проекционном изображении содержится еще много другой смысловой информации, которую можно выявить, меняя ключевую группу $\mathbf{L_S}$. Можно, например, визуализировать грануляцию бетона, если бы такая задача была практически актуальной.

В том случае, когда принципиальный теоретический результат уже получен, плодотворны попытки максимально упростить его до тех пределов, когда основанные на этих упрощениях алгоритмы “еще работают”, давая приближенные практические результаты, не очень сильно отличающиеся от “настоящих”. Варианты таких упрощенных процедур (1) можно найти в [7 8, 9]. В данной публикации мы не имеем возможности остановиться на обсуждении таких подробностей как механизмы подавления высокочастотных шумов, “отстройка” от низкочастотного тренда в алгоритмах этого типа, также как и анализ ошибок первого и второго рода при статистическом распознавании.

Основные результаты в развитии структурно-ориентированных методов ОИ

Структурный подход к разработке математических моделей оформился в общих чертах в XIX-ом столетии, главным образом в связи с развитием геометрии, в особенности в связи с появлением первых *неевклидовых геометрий*, пробудивших интерес математиков к дедуктивному построению математических теорий и к *аксиоматическому методу* — способу построения научной теории, при котором все ее предложения получаются как логические следствия аксиом. Возникновение к середине столетия многих “геометрий”, пришедших на смену единой Евклидовой геометрии, привело к проблеме установления родственных связей между ними и их классификации. Своеобразный итог этому развитию подвел Ф.Клейн в 1872 г. в своей работе “Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований”, более известной под названием “Эрлангенская программа”, согласно которой, всякая группа преобразований может служить группой автоморфизмов некоторой геометрии, а ее инварианты описывают внутренние свойства этой геометрии и дают структурную классификацию ее теорем. Например, Евклидова геометрия занимается инвариантными свойствами группы движений, проективная геометрия – нахождением инвариантов проективной группы, аффинная – аффинной группы и т.д, Сам Клейн, выделяя различные геометрии (аффинную, проективную, конформную, “обратных радиусов” и проч.) из базовой Евклидовой геометрии, сравнивал такого рода деятельность с работой химика. Чем сильнее, по его словам, “протрава” (т.е. ключевая группа), тем беднее, но и тем ценнее результат. Классификация Клейна послужила образцом для всех дальнейших теоретико-групповых структурных исследований и в сильнейшей степени повлияла на развитие физики XX-ого столетия.

Родство идеологии “структурно-ориентированных подхода” с классикой очевидно т.к. в нем структурная классификации решений осуществляется на основе теоретико-групповых принципов. В обоих случаях пересечение исходного набора аксиом $\mathbf{A_O}$ и аксиом $\mathbf{A_S}$ определяет новую проблемную область с аксиомами $\mathbf{A}$, причем $\mathbf{A_S}$ являются предположениями теоретико-группового характера. Базовым объектом исследования, - своего рода “матрицей”, порождающим новые проблемные области, является: в случае классификации Клейна – Евклидова геометрия, в случае “структурно-ориентированного подхода” – условия исходной некорректной задачи. В обоих случаях происходит “обеднение” новой проблемной области в сравнении с исходной т.е. появляется разреженная (или, по Клейну, “протравленная”) структура и в то же время в обоих случаях происходит ценная “фокусировка смысла” (освобождение от мешающих смыслов “низшего порядка”).

Обратим внимание и на отличия “структурно-ориентированного подхода” от классической схемы теоретико-группового анализа. Безусловно, решающим отличием является внесение в эту схему статистических аспектов. Подход, в котором $\mathbf{A_S}$ является статистической гипотезой, сразу делает структурно-ориентированные методы конструктивными, иными словами, в таком подходе есть мощные средства превращения классических процедур теоретико-группового анализа в синтетические реконструктивные процедуры, непосредственно “строящие" исследуемый объект. Это отчетливо проявляется, например, в методах ОИ, основанных на “локальной симметрии”. В них для постройки изображения используется не какая-то материальная функция (типа μ (x, y, z)), а статистическая (обычно нелинейная) функция элементов изображения, отражающая степень интенсивности структурно-функциональных связей отдельного элемента со всеми другими элементами в некоторой его окрестности (“пятне”). Заметим еще, что в отличие от классики в статистическом теоретико-групповом подходе исходная информация при настройке на выделяемую разреженную субструктуру не урезается за счет “объявления” некоторых элементов исходной структуры равными (как, например при переходе от Евклидовой геометрии к аффинной, когда объявляются равными и неопределенными углы и стороны треугольника). Она целиком используется для статистической поддержки инвариантов выделяемой субструктуры. В статистическом подходе нет той ограничительной жесткости, которая свойственна чисто детерминистким методам, поэтому на основе структурно-ориентированного подхода можно делать надежнейшие статистические выводы и при работе как с “недоопределенным” набором исходных данных для некорректных задач так и с “переопределенным” (т.е. с противоречивыми и зашумленными данными). Тем более, это можно делать и с “хорошо определенными” данными для корректной задачи и с самим решением этой задачи.

При решении некорректных задач ВТ и ОИ для целей дефектоскопии, материаловедения и ряда других приложений выявление структурно-функциональных связей важнее, чем решение исходных “материальных уравнений” (типа μ (x, y, z) в ВТ). Если соответствующая задача ВТ хорошо регуляризирована и может быть решена как корректная, то выявление этих связей может быть осуществлено и по μ (x, y, z). Однако, наиболее предпочтительным остается путь их выявления по исходным проекционным данным т.к. в процессе реконструкции μ (x, y, z) теряется важная информация. Этот вопрос актуален и требует подробного анализа в отдельной публикации.

На основе структурно-ориентированных методов ОИ уже решены многие, ранее “нерешабельные” практические задачи. Область приложений этих методов широка (прежде всего это вычислительная диагностика и математическая физика). В последнее время наметились также их применения в качестве математической основы для решения некоторых гуманитарных проблем (в синтетической “компьютерной психологии”, в разнобразных “интеллектуальных информационных технологиях” и пр.). Тем не менее, основной их областью приложений остается неразрушающий контроль. Особенно перспективно их использование на стыке дефектоскопии и материаловедения. Одной из проблем этого рода, которая уже успешно решается, является визуализация зон формирования трещин гл. образом в сварных швах на основе рентгеновских методов, включая и методы томографические [8-10, 12]. Структурно-ориентированные методы ОИ послужили также основой для разработки эффективных методов *морфологического анализа* изображений и для ситуационного распознавания образов [12].

Литература

1. Баранов В.А., Чекалин А.С. Система цифрового томосинтеза для неразрушающего контроля // Дефектоскопия, 1988. –№ 5. – с. 30-36.
2. Baranov V., Chakhlov V., Kröning M., Morgner W. High speed computerized tomography on thickwalled steel and concrete components using a portable 6 MeV betatron // In coll. of papers to "6-th European Conference on Non-destructive testing", Nice, France, 1994, Vol. 2, pp. 1287-1291.
3. Baranov V.A., Temnik A.K., Chakchlov V.L., Chekalin A.S. Betatron tomography with the use of nonlinear backprojection techniques // In coll. of papers to International Symposium on Computerized Tomography for Industrial Applications. – Berlin, 1994. – pp. 271-277.
4. Baranov V.A. Convex projections reconstruction algorithms on the basis of non-linear backprojection approach // In coll. of papers to International Symposium on Computerized Tomography for Industrial Applications. – Berlin, 1994. – pp. 88-95.
5. Ewert U., Schumm A., Nockeman C. (Berlin), Baranov V.A. (Tomsk, RUS), Fortschritte auf dem Gebiet der digitalen Laminographie // Deutsche Gesellschaft für Zerstörungsfreie Prüfung e.V., Jahrestagung 1995 (100 Jahre Röntgenstrahlen und die heutige Vielfalt Industrieller ZfP-Praxis). – Aachen, 1995. – ss. 471-475 .
6. Baranov V.A. A Variational Approach to Non-Linear Backprojection // "Computerized Tomography", coll. of papers , Editor-in-Chief: M.M.Lavrent'ev. – Utrecht, the Netherlands, 1995. – pp. 82-97.
7. Ewert U., Baranov V., Borchard K. Cross-sectional imaging of building elements by new non-linear tomosynthesis technique using imaging plates and ^{60}Co radiation" // invited paper in "NDT & E International". – 1997 Elsevier Science Ltd.. – Vol. 30. – № 4. – pp. 243-248.
8. Ewert U., Redmer B., Müller J, Trobitz M (Berlin), Baranov V (Tomsk, RUS). Mechanisierte Durchstrahlungsprűfung von Rundschweissnäten – Prüfung mediengefüllter Rohrleitungen und Tiefenlagebestimmung durch Tomosynthese // 23 MPA-Seminar "Sicherheit und Verfügbarkeit in der Anlagetechnik" mit dem Schwerpunkt "Verhalten von druckfürenden Komponenten und Systemen bei erhöten Belastungen", Staatliche Materialprüfunganstalt (MPA). – 1997 Universität Stuttgart, Band 23. – ss. 13.1-13.14.
9. Redmer B., Ewert U., Onel Y. (Berlin), Müller J. (Frechen), Diener H. (Nürnberg), Walkman M. (Gundremmingen), Baranov V. (Tomsk, Russia) Automated radiometric weld inspection in nuclear power industry by tomosynthesis // In coll. of papers to International Symposium "Computer Methods and Inverse Problems in Nondestructive Testing and Diagnostics (CM NDT-98)". – Minsk, 1998. – pp. 441-448.
10. Redmer B., Ewert U, Onel Y. (BAM-Berlin, Germany), Lichachev A.V., Pickalov V.V. (Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Novosibirsk, Russia), Zheng Li (Tsinghua University, China), Baranov V.A. (Institute of Introscopy, Tomsk, Russia) Sensitive Detection of Planar Defects by a Mechanized Radiometric Weld Inspection System // 15-th World Conference on Nondestructive Testing (Rome — 2000, CD of proceedings).
11. Baranov V., Ewert U. A group-theoretical approach to ill-posed problems" // Book of abstract to 3-d international scientific conference "Computer Methods and Inverse Problems in NDT and Diagnostics " (CM NDT - 2001). – Moscow, 2002. – pp. 11-12.
11. Baranov V., Ewert U., Redmer B. Reconstruction of cracks on the basis of group-theoretical algorithms of situational recognition // Book of abstract to 3-d international scientific conference "Computer Methods and Inverse Problems in NDT and Diagnostics " (CM NDT - 2001). – Moscow, 2002. – p. 39-40.
12. Radon J., Uber die Bestimmung von Functionen durch ihre integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten // Leipzig: Ber. Verh. Sachs. Acad. Wiss., 1917.

13. Тихонов А.Н., Математическая модель // (Статья в “Математическом энциклопедическом словаре”), Москва, “Большая Российская энциклопедия”. – 1995. – с. 343-344.
14. Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления. – Москва, ”ИЛ”. – 1947.