

# Устойчивость магнитогидродинамического течения Пуазейля в продольном магнитном поле

Проскурин А.В., Сагалаков А.М.

*Алтайский государственный технический университет, 656038,  
Алтайский край, г. Барнаул, пр. Ленина 46, кафедра прикладной  
математики, кафедра высшей математики, runme5@ngs.ru*

## Аннотация

В работе исследуется устойчивость к малым возмущениям течения электропроводящей вязкой жидкости в плоском канале при наличии продольного магнитного поля. Обнаружена новая ветвь неустойчивости и скачкообразное изменение критических чисел Рейнольдса.

**Ключевые слова:** гидродинамическая устойчивость, ламинарно-турбулентный переход, магнитная гидродинамика, течение Пуазейля.

В работе рассмотрена классическая задача устойчивости плоского течения Пуазейля вязкой электропроводящей жидкости в продольном магнитном поле. Первоначально эта задача рассматривалась Е.П. Велиховым [1]. Анализ задач гидродинамической устойчивости с использованием современных возможностей вычислительной техники иногда приводит к интересным новым результатам [2, 3, 4].

В данной работе рассчитаны зависимости критических чисел Рейнольдса  $Re_*$  от электропроводности. Расчеты производились вплоть до величин  $Re_* \sim 10^7$ . Авторами впервые наблюдалось сложное поведение параметрических зависимостей  $Re_*(Al, P_m)$ . Обнаружена новая ветвь неустойчивости.

Малые возмущения стационарного течения рассматривались в магнитогидродинамическом приближении. С помощью метода элементарных волновых решений линеаризованную систему уравнений магнитной гидродинамики преобразуем в безразмерную систему уравнений для комплексных

амплитуд возмущений

$$i\alpha(U - C)h_x = i\alpha v_x + h_y U' + \frac{1}{P_m \text{Re}} (h_x'' - h_x(\alpha^2 + \beta^2)), \quad (1)$$

$$i\alpha(U - C)h_y = i\alpha v_y + \frac{1}{P_m \text{Re}} (h_y'' - h_y(\alpha^2 + \beta^2)), \quad (2)$$

$$i\alpha(U - C)h_z = i\alpha v_z + \frac{1}{P_m \text{Re}} (h_z'' - h_z(\alpha^2 + \beta^2)), \quad (3)$$

$$i\alpha(U - C)v_x + v_y U' = -i\alpha q + i\alpha \text{Al} h_x + \frac{1}{\text{Re}} (v_x'' - v_x(\alpha^2 + \beta^2)), \quad (4)$$

$$i\alpha(U - C)v_y = -q' + i\alpha \text{Al} h_y + \frac{1}{\text{Re}} (v_y'' - v_y(\alpha^2 + \beta^2)), \quad (5)$$

$$i\alpha(U - C)v_z = -i\beta q + i\alpha \text{Al} h_z + \frac{1}{\text{Re}} (v_z'' - v_z(\alpha^2 + \beta^2)), \quad (6)$$

$$v_y' + i\alpha v_x + i\beta v_z = 0. \quad (7)$$

где  $v_x, v_y, v_z, h_x, h_y, h_z$ , – проекции амплитуд возмущений скорости и напряженности магнитного поля на соответствующие оси декартовой системы координат,  $\text{Al} = \frac{H_0^2}{4\pi\rho V_0^2}$  – число Альфвена,  $\text{Re} = \frac{V_0 d}{\nu}$  – число Рейнольдса,  $\text{R}_m = V_0 d \frac{4\pi\sigma}{c^2} = P_m \text{Re}$  – магнитное число Рейнольдса,  $P_m = \frac{\text{R}_m}{\text{Re}} = \frac{4\pi\sigma\nu}{c^2}$  – магнитное число Прандтля, прямо пропорциональное электропроводности,  $\rho$  – плотность жидкости,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $c$  – скорость света,  $\sigma$  – электропроводность жидкости,  $U = \frac{3}{2}(1 - 4y^2)$  – стационарный параболический профиль скорости,  $q$  – возмущение давления,  $\alpha$  – продольное волновое число,  $\beta$  – поперечное волновое число,  $C = X + iY$  – комплексная фазовая скорость, в которой  $X$  – собственно фазовая скорость, а  $\alpha Y$  – декремент затухания возмущения ( $Y < 0$ ) или инкремент его нарастания ( $Y > 0$ ). В качестве масштабов выбраны: ширина канала ( $d$ ), среднерасходная скорость ( $V_0$ ), величина напряженности внешнего магнитного поля ( $H_0$ ). С постановкой задачи более подробно можно ознакомиться по монографиям [5, 6].

Стенки канала предполагаются непроницаемыми и идеально электропроводящими. Граничные условия для возмущений имеют вид

$$\mathbf{v} = 0, h_y = 0 \text{ при } y = \pm \frac{1}{2}. \quad (8)$$

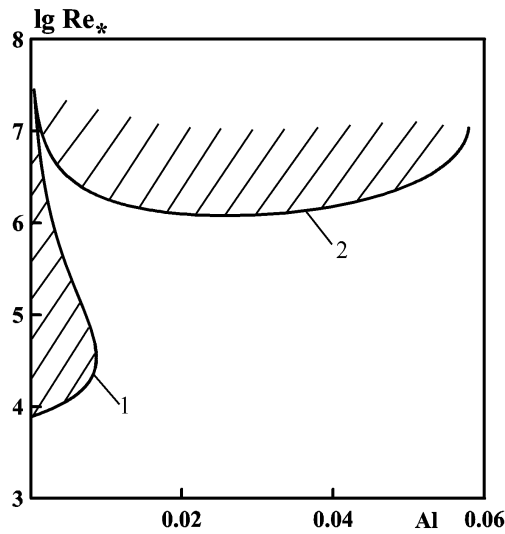


Рисунок 1. Зависимости  $Re_*(Al)$ ,  $P_m = 0.01$

Уравнения (1)-(7) и граничные условия (8) определяют задачу на собственные значения для отыскания  $C$ , при решении которой использовался метод дифференциальной прогонки [5]. Данный метод был разработан специально для задач гидродинамической устойчивости под руководством академика Н.Н.Яненко. Численные алгоритмы, использованные в данной работе, тщательно тестировались, для контроля вычислений использовались разные схемы дифференциальной прогонки.

Рассмотрим двумерные возмущения. На рисунке 1 приведены зависимости  $Re_*(Al)$  при  $P_m = 0.01$ . Штриховкой обозначено расположение области неустойчивости. При  $Al \rightarrow 0$  критические числа Рейнольдса стремятся к величинам, соответствующим случаю плоского течения Пуазейля диэлектрической жидкости. При увеличении числа Альфвена критические числа Рейнольдса монотонно увеличиваются вплоть до  $Al \approx 0.01$ , после чего кривая критических зависимостей при  $Al \approx 0.01$  «разворачивается» в сторону уменьшения чисел Альфвена, ограничивая область неустойчивости сверху (кривая 1 на рисунке 1). Таким образом, установлено, что при увеличении числа Альфвена критические числа Рейнольдса скачкообраз-

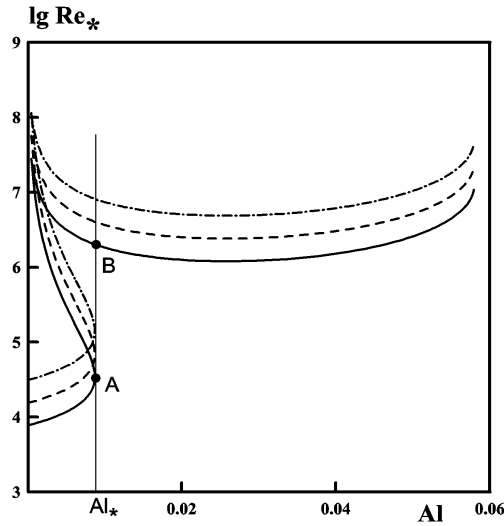


Рисунок 2. Зависимости  $Re_*(Al)$ ,  $P_m = 0.01$  для  $\cos \theta = 1$  (сплошная линия),  $\cos \theta = \frac{1}{2}$  (пунктирная линия),  $\cos \theta = \frac{1}{4}$  (штрих-пунктирная линия).

но увеличиваются. Выше данной области при числах Рейнольдса порядка  $10^7$  обнаружена новая ветвь неустойчивости, критические зависимости которой представляют собой выпуклую вниз кривую (кривая 2 на рисунке 1).

Для проверки роли двумерных возмущений был проведен дополнительный анализ трехмерных возмущений, который позволяет судить об их влиянии на картину устойчивости. При этом обнаружены области, в которых трехмерные возмущения являются более опасными. На рисунке 2 в качестве примера приведены зависимости  $Re_*(Al)$  при  $P_m = 0.01$  для  $\cos \theta = 1$  (сплошная линия),  $\cos \theta = \frac{1}{2}$  (пунктирная линия),  $\cos \theta = \frac{1}{4}$  (штрих-пунктирная линия),  $\cos \theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ . Аналогичные графики критических зависимостей для других значений  $\cos \theta \neq 1$  могут быть построены с помощью преобразования Сквайра  $Re_* = \frac{(Re_{eff})_*}{\cos \theta}$ . К нижней ветви критических зависимостей  $\cos \theta = 1$  можно провести вертикальную касательную в точке  $A$  (соответствующее число Альфвена обозначим  $Al_*$ ), которая пересекает верхнюю ветвь критических зависимостей  $\cos \theta = 1$  в точке  $B$ . Слева от отрезка  $AB$  расположена область неустойчивости трехмерных возмущений ( $\cos \theta < 1$ ).

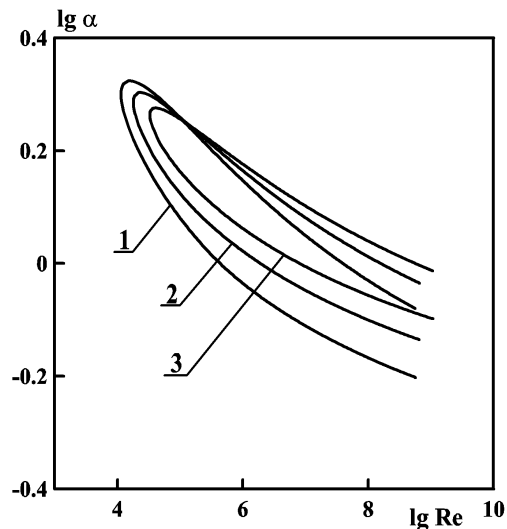


Рисунок 3. Нейтральные кривые,  $P_m = 1.5$ ,  
 $Al = 0.005(1), 0.01(2), 0.15(3)$

Таким образом, учет трехмерных возмущений расширяет область неустойчивости, но двумерные возмущения являются наиболее опасными в том смысле, что критические числа Рейнольдса по отношению к ним являются наименьшими по сравнению с критическими числами Рейнольдса для трехмерных возмущений. При этом области неустойчивости для трехмерных возмущений могут быть получены путем простых смещений графиков критических зависимостей для двумерных возмущений. Для анализа устойчивости при  $Al < Al_*$  достаточно рассмотреть двумерные возмущения до точки  $A$ .

На рисунке 3 представлены нейтральные кривые при  $P_m = 1.5$  и  $Al = 0.005, 0.01, 0.15$ . При увеличении числа Альфвена наблюдается увеличение критических чисел Рейнольдса и некоторое смещение области неустойчивости в сторону коротковолновых возмущений.

На рисунке 4 представлены кривые критических зависимостей  $Re_*(P_m)$

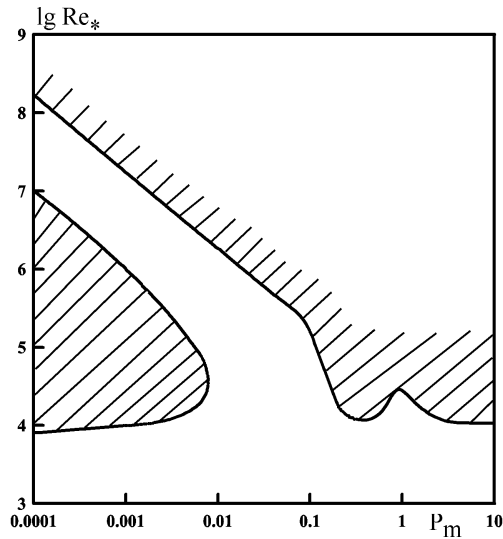


Рисунок 4. Зависимости  $Re_*(P_m)$  при  $Al = 0.01$

при числе Альфвена 0.01. Картина неустойчивости имеет вид, необычный для задач гидродинамической устойчивости. Наблюдаемые на данных рисунках области неустойчивости имеют сложную форму. Штриховкой показано расположение области неустойчивости. При  $P_m \rightarrow 0$  величины критических чисел Рейнольдса стремятся к соответствующим значениям в случае диэлектрической жидкости, при  $P_m > 10$  критические зависимости выходят на горизонтальные асимптоты, соответствующие  $P_m \rightarrow \infty$ . Увеличение магнитного числа Прандтля от 0.0001 до 0.001 приводит к небольшому увеличению критических чисел Рейнольдса. При дальнейшем увеличении магнитного числа Прандтля кривая критических зависимостей «разворачивается» в сторону уменьшения магнитного числа Прандтля, ограничивая рассматриваемую область неустойчивости сверху. С увеличением числа Альфвена данная область неустойчивости сжимается, причем изменение числа Альфвена более сильно влияет на ее верхнюю границу. Вы-

ше рассмотренной области неустойчивости располагается область устойчивости, которая ограничена сверху второй ветвью критических зависимостей. Критические числа Рейнольдса данной ветви убывают с увеличением магнитного числа Прандтля. Такое расположение кривых критических зависимостей обуславливает скачкообразное увеличение критических чисел Рейнольдса при увеличении величины  $R_m$ . Аналогичное поведение критических зависимостей наблюдается и при  $R_m \approx 1$ . На рисунке 4 при  $R_m \approx 1$  критические зависимости имеют характерный максимум, который при дальнейшем увеличении числа Альфвена исчезает. При этом на его месте возникает «просвет» устойчивости данного течения.

В данной работе обнаружена новая ветвь неустойчивости рассматриваемого течения в продольном магнитном поле. Также установлено, что полной стабилизации течения, в отличие от результатов работы [1], в рассматриваемом диапазоне чисел Альфвена не происходит, так как скачок критических чисел Рейнольдса ограничивается новой ветвью неустойчивости.

## Список литературы

- [1] Велихов Е.П. Устойчивость плоского пуазейлева течения идеально проводящей жидкости в продольном магнитном поле // ЖЭТФ. – 1959. – Т. 36. – Вып. 4. – С. 1192-1202.
- [2] Vorobev A., Zikanov O. On the stability of a free shear layer affected by a parallel magnetic field // J. Fluid Mech. – 2007. – № 574. – P. 131-154.
- [3] Boeck T., Krasnov D.S., Zienicke E., Zikanov O., Thess A. Numerical study of the instability of the Hartmann layer // J. Fluid Mech. – 2004. – Vol. 504. – P.183-211.

- [4] Zikanov O. On the instability of pipe Poiseulle flow // Phys. Fluids. –1996. – № 8. – P. 2923-2932.
- [5] Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность – Новосибирск: Наука. – 1977.
- [6] Henningson D.S., Schmid P.J. Stability and transition in shear flows. – New York: Springer-Verlag. – 2001.