УДК 535.31

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ АПЛАНАТИЧЕСКИХ ТОЧЕК ПРЕЛОМЛЯЮЩИХ СФЕР

Н. А. Агапов, В. В. Бразовский, В. А. Баранов, Н.В. Бразовская

Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск,
Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, г. Барнаул
E-mail: altaikompozit@mail. Ru, braz@agtu.secna.ru

Аннотация. На основе формул по расчету хода луча для апланатических точек преломляющих сфер, в которых устранена сферическая аберрация и выполняется условие синусов, построена математическая модель принципа Ферма.

Ключевые слова: апланатические сферы, апланатические точки

Как известно $[1]$, у всякой преломляющей сферы имеются две апланатические сферы, являющиеся резким изображением друг друга. Рассмотрим две осевые апланатические точки A и A', расположенные относительно преломляющей сферы S соответственно на расстояниях s и s' (рис. 1), значения которых определяются выражениями:

$$s=\frac{n+n'}{n}r, \tag{1}$$

$$s'=\frac{n+n'}{n'}r. \tag{2}$$

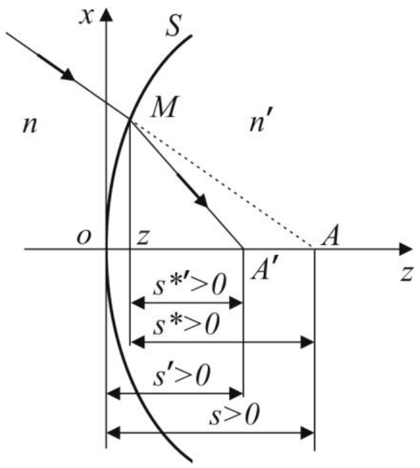

Рис. 1. Апланатические точки A и A' преломляющей сферы S, $n'>n$

Сравнивая выражения (1) и (2), легко увидеть, что оптическая длина падающего осевого луча OA от его точки падения O на поверхность S до точки предмета A равна оптической длине преломленного луча OA' от его точки падения O на поверхность S до точки изображения A', то есть:

$$sn=s'n'=\left(n+n'\right)r. \tag{3}$$

Для дальнейшего исследования некоторых свойств апланатических точек воспользуемся формулами по расчету хода лучей, изложенными в книге $[1]$, и результатами работы $[2]$. Очевидно, для сферы

$$e=0,\ c=-1. \tag{4}$$

Рассмотрим гомоцентрический пучок лучей, сходящихся в точке предмета A. Пусть M - точка встречи одного из лучей гомоцентрического пучка с поверхностью S (рис. 1). Тогда для луча MA можно записать $[1]$:

$$\boldsymbol{P} = -s\boldsymbol{S}\,,\ \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{S} = -s\,\boldsymbol{S}^2\,,\ \boldsymbol{P}^2 = s^2\,\boldsymbol{S}^2\,, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{S}$ - параметры падающего луча. Подставим (4) и (5) в формулы по расчету хода луча и после преобразований получим:

$$z = -\frac{1}{b\,n^2}\left[\zeta^2\sqrt{\frac{n'^2}{n^2}-\frac{n'^2-n^2}{\zeta^2}} - n\left(n'+n\right) + \frac{n'}{n}\zeta^2\right], \tag{6}$$

$$\overline{\psi} = -\left(\sqrt{\frac{n'^2}{n^2}-\frac{n'^2-n^2}{\zeta^2}} - \frac{n'}{n}\right). \tag{7}$$

Из рисунка 1 находим:

$$s^* = s - z > 0\,,\ l^* = \frac{s^*}{\varsigma} = \frac{L}{n} > 0\,, \tag{8}$$

$$s^{*\prime} = s' - z > 0\,,\ l^{*\prime} = \frac{s^{*\prime}}{\varsigma'} = \frac{L'}{n'} > 0\,, \tag{9}$$

где $L > 0$ - геометрическая длина луча MA, $L' > 0$ - геометрическая длина луча MA'. Из выражений (8) следует, что

$$l^* = \frac{s^*}{\varsigma} = \frac{s-z}{\varsigma}\,. \tag{10}$$

Согласно работе $[2]$, для одной поверхности справедливо соотношение:

$$l^{*\prime} = \frac{l^*}{1 + l^* b\,\zeta\,\overline{\psi}}\,. \tag{11}$$

Подставляя (1) и (6) в (10), находим:

$$l^* = \frac{\varsigma}{b\,n^2}\left(\sqrt{\frac{n'^2}{n^2}-\frac{n'^2-n^2}{\zeta^2}} + \frac{n'}{n}\right). \tag{12}$$

Подставим (7) и (12) в (11) и после преобразований получим:

$$l^{*\prime} = \frac{\varsigma}{b\,n'^2}\left(\sqrt{\frac{n'^2}{n^2}-\frac{n'^2-n^2}{\zeta^2}} + \frac{n'}{n}\right). \tag{13}$$

Сравнивая (12) и (13), с учетом (8) и (9) можно записать:

$$l^*\,n^2 = l^{*\prime}\,n'^2 = n\,L = n'\,L' = \frac{\varsigma}{b}\left(\sqrt{\frac{n'^2}{n^2}-\frac{n'^2-n^2}{\zeta^2}} + \frac{n'}{n}\right). \tag{14}$$

то есть, оптическая длина падающего луча MA равна оптической длине преломленного луча MA'. Для осевого луча $\zeta = n$ и тогда выражение (14) примет вид:

$$l^*\,n^2 = l^{*\prime}\,n'^2 = n\,L = n'\,L' = \frac{n+n'}{b}\,, \tag{15}$$

Сравнивая (3) и (15), видим, что формула (3) является частным случаем формулы (14).

Используя выражения (3) и (14), находим, что оптическая длина ℓ произвольного луча AMA' от точки предмета A до ее изображения A' равна оптической длине осевого луча AOA' от точки предмета A до ее изображения A' и, значит, имеет наименьшее значение:

$$\ell = -s\,n + s'\,n' = -l^*\,n^2 + l^{*\prime}\,n'^2 = 0\,. \tag{16}$$

Выражение (16) представляет собой математическую формулировку принципа Ферма для апланатических точек преломляющей сферы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Герцбергер М. Современная геометрическая оптика. - М.: Изд. иностр. лит., 1962 – 420с.
2. Агапов Н.А. К вопросу о главных поверхностях оптических систем / Ред. журн. "Изв. вузов. Физика". - Томск, 2010. - Деп. в ВИНИТИ 20.12.2010, Рег. № 707-В2010.