УДК 535.31

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОЙСТВ ДЕКАРТОВЫХ ПРЕЛОМЛЯЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Н. А. Агапов, В. В. Бразовский, В. А. Баранов, Н.В. Бразовская

Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск,
Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, г. Барнаул
E-mail: altaikompozit@mail. Ru, braz@agtu.secna.ru

Аннотация. На основе формул по расчету хода луча для декартовых преломляющих поверхностей получена математическая формулировка принципа Ферма: оптическая длина луча от падающего волнового фронта до декартовой точки есть величина постоянная и равна оптической длине осевого луча, то есть имеет наименьшее значение.

Ключевые слова: асферические поверхности, декартовые преломляющие поверхности

Рассмотрим преломление луча на асферической поверхности второго порядка, пользуясь для этого методом расчета хода луча, изложенным в книге $[1]$, а также результатами, полученными в работе $[2]$. Для дальнейших расчетов приведем уравнение поверхности к более удобной для использования форме:

$$z=\frac{\sqrt{1+b^2c\mathbf{A}^{*2}}-1}{bc}. \qquad (1)$$

Обратимся к рисунку 1. Пусть A - точка предмета, расположенная на оси, AP - луч, вышедший из точки предмета, P - точка встречи луча с поверхностью, A' - точка пересечения преломленного луча AP' с оптической осью, $L<0$ - геометрическая длина луча AP, $L'>0$ - геометрическая длина луча PA'.

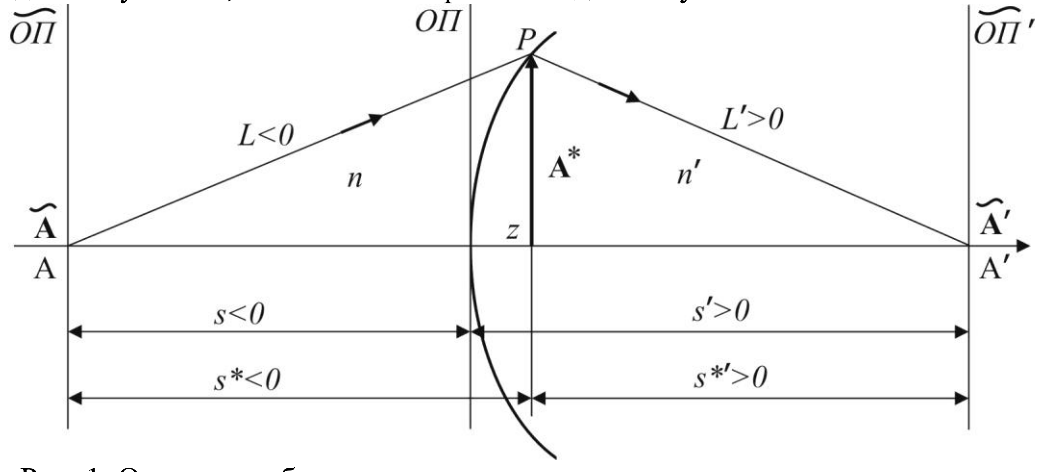

Рис. 1. Основные обозначения

Из рисунка 1 находим:

$$s^*=s-z<0\,,\; l^*=\frac{s^*}{\varsigma}=\frac{L}{n}<0\,, \qquad (2)$$

$$s^{*\prime} = s' - z > 0\,,\ l^{*\prime} = \frac{s^{*\prime}}{\varsigma'} = \frac{L'}{n'} > 0\,. \tag{3}$$

Согласно $[2]$, запишем преобразование параметров произвольного луча между опорными плоскостями $\widetilde{\hat{I}\,\ddot{I}}$ и $\widetilde{\hat{I}\,\ddot{I}}\,'$:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{A}}' \\ \boldsymbol{S}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l^{*\prime} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi^{*} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -l^{*} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{A}} \\ \boldsymbol{S} \end{pmatrix} = \widetilde{M} \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{A}} \\ \boldsymbol{S} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \widetilde{C} & \widetilde{D} \end{pmatrix},\ \widetilde{A} = 1 - l^{*\prime}\varphi^{*},\ \widetilde{C} = -\varphi^{*},\ \widetilde{D} = 1 + l^{*}\varphi^{*}, \tag{5}$$

$$\widetilde{B} = -l^{*}\left(1 - l^{*\prime}\varphi^{*}\right) + l^{*\prime}\,. \tag{6}$$

Для сопряженных точек сечения, полагая $\widetilde{B} = 0$, из (6) находим:

$$l^{*\prime} = \frac{l^{*}}{1 + l^{*}\varphi^{*}}\,. \tag{7}$$

Из (3) с учетом (7) и результатов работы $[2]$ следует:

$$s' = \frac{s + \overline{\psi}\,\overline{t}\,(s - z)}{1 + \overline{\psi}\,b(s - z)}\,. \tag{8}$$

Рассмотрим частный случай: точка предмета находится на оси и бесконечности, то есть $s \to \infty$. Тогда, совершая предельный переход, из (8) получим:

$$s' = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{\overline{\psi}} + \overline{t}\right). \tag{9}$$

Для точки предмета на оси и в бесконечности имеем:

$$\zeta = n\,,\ \boldsymbol{S} = 0\,,\ \boldsymbol{P} = n\boldsymbol{A}^{*}\,. \tag{10}$$

Далее, следуя $[1]$, рассмотрим поверхности, эксцентриситет которых определяется выражением:

$$e = \frac{n}{n'}\,. \tag{11}$$

Подставим (1), (10) и (11) в формулы по расчету хода луча и после преобразований получим:

$$\overline{t} = -\frac{1}{c}\left[1 - (c+1)\sqrt{1 + b^2 c \boldsymbol{A}^{*2}}\right],\ \overline{\psi} = \frac{n' - n\sqrt{1 + b^2 c \boldsymbol{A}^{*2}}}{n\left(1 + b^2 e^2 \boldsymbol{A}^{*2}\right)}\,. \tag{12}$$

Выражения (12) подставим в (9) и после преобразований получим известный $[1]$ результат:

$$s' = \frac{1}{b(1 - e)} = \mathrm{const} = s_0'\,, \tag{13}$$

то есть все лучи, параллельные оптической оси, после преломления поверхностью второго порядка (1) с эксцентриситетом, равным отношению показателя преломления в пространстве предметов к показателю преломления в пространстве изображений, сходятся в декартовой точке F', расположенной на расстоянии s'_0 от вершины поверхности.

Поскольку $s \to \infty$, то согласно (2) и $l^* \to \infty$, тогда из (7) находим:

$$l^{*\prime} = \lim_{l^* \to \infty} \frac{l^*}{1 + l^* \varphi^*} = \frac{1}{\varphi^*} = \frac{1}{nb\overline{\psi}}. \tag{14}$$

Проведем волновой фронт $\hat{O}$ падающей плоской волны через вершину поверхности (рис. 2) и найдем оптическую длину ℓ луча от падающего фронта $\hat{O}$ до точки F':

$$\ell = nz + n'L' = nz + n'^2 l^{*\prime}. \tag{15}$$

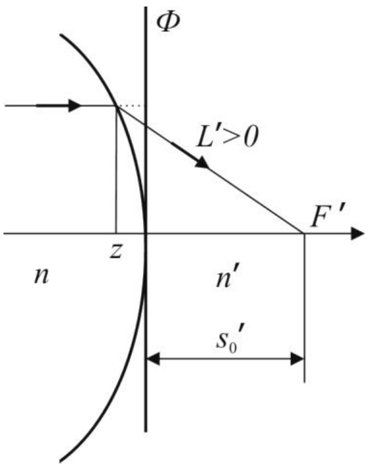

Рис. 2. Декартова преломляющая поверхность

Подставим (1), (11), (12) и (14) в (15) и после преобразований получим:

$$\ell = \frac{n'}{b(1-e)} = n's'_0. \tag{16}$$

Выражение (16) представляет собой математическую формулировку принципа Ферма: оптическая длина луча от падающего волнового фронта до декартовой точки F' есть величина постоянная и равна оптической длине осевого луча, то есть имеет наименьшее значение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Герцбергер М. Современная геометрическая оптика. - М.: Изд. иностр. лит., 1962. – 420 с.
2. Агапов Н.А. К вопросу о главных поверхностях оптических систем / Ред. журн. "Изв. вузов. Физика". - Томск, 2010. - Деп. в ВИНИТИ 20.12.2010, Рег. № 707-В2010.