УДК 535.31

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ ДЕКАРТОВЫХ ОТРАЖАЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Н. А. Агапов, В. В. Бразовский, В. А. Баранов, Н.В. Бразовская

Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск,
Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова,
г. Барнаул
E-mail: altaikompozit@mail. Ru, braz@agtu.secna.ru

Аннотация. На основе формул по расчету хода луча для декартовых отражающих поверхностей получена математическая формулировка принципа Ферма для эллипса и гиперболы (равно как и для эллипсоида, и гиперболоида вращения)

Ключевые слова: асферические поверхности, декартовые отражающие поверхности

Рассмотрим отражение луча на асферической поверхности второго порядка, пользуясь для этого методом расчета хода луча, изложенным в книге $[1]$, а также результатами, полученными в работе $[2]$. Уравнение поверхности представим в виде:

$$F(u^*, z) = z + \frac{1}{2}bcz^2 - \frac{1}{2}b\,\boldsymbol{A}^{*2} = 0. \qquad (1)$$

Известно $[1]$, что положение декартовых точек отражающих поверхностей, описываемых уравнением вида (1), определяется выражениями:

$$s = \frac{1}{b(1-e)}, \qquad (2)$$

$$s' = \frac{1}{b(1+e)}. \qquad (3)$$

Рассмотрим по отдельности все виды декартовых отражающих поверхностей.

1. Параболоид вращения.

Для отражающего параболоида

$$n = n', \; e = 1, \; c = 0. \qquad (4)$$

Согласно (2-3), первая декартовая точка отражающего параболоида находится на оси и в бесконечности ($s \to \infty$), вторая – в фокусе F' параболоида (рис. 1):

$$s' = \frac{1}{2b}. \qquad (5)$$

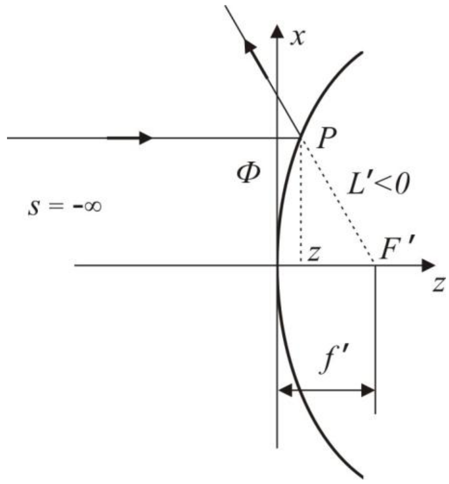

Рис. 1. Отражающий параболоид вращения

Для точки предмета на оси и в бесконечности имеем:

$$\zeta = n\,,\ \boldsymbol{S} = 0\,,\ \boldsymbol{P} = n\boldsymbol{A}^*\,. \tag{6}$$

Подставим (4) и (6) в формулы по расчету хода луча $[1]$, получим:

$$z = \frac{1}{2} b\,\boldsymbol{A}^{*2}\,, \tag{7}$$

$$\overline{\psi} = -\frac{2}{1 + b^2 \boldsymbol{A}^{*2}}\,. \tag{8}$$

Согласно $[2]$ для одной поверхности можно записать:

$$l^{*\prime} = \frac{l^*}{1 + l^* \varphi^*}\,, \tag{9}$$

где

$$\varphi^* = n b \overline{\psi}\,. \tag{10}$$

Поскольку $s \to \infty$, то и $l^* \to \infty$, тогда из (9) с учетом (10) находим:

$$l^{*\prime} = \lim_{l^* \to \infty} \frac{l^*}{1 + l^* \varphi^*} = \frac{1}{\varphi^*} = \frac{1}{n b \overline{\psi}}\,. \tag{11}$$

Проведем волновой фронт $\hat{O}$ падающей плоской волны через вершину поверхности (рис. 1) и найдем оптическую длину ℓ луча от падающего фронта $\hat{O}$ до фокуса F':

$$\ell = n\,z + n' L' = n\,z + n'^2 l^{*\prime}\,, \tag{12}$$

где $L' < 0$ - геометрическая длина луча PF' от точки P его падения на поверхность до фокуса F'.

Подставим (4), (7), (8) и (11) в (12), получим:

$$\ell = -n\frac{r}{2} = -n\,f' = \text{const}\,, \tag{13}$$

где f' - фокусное расстояние параболоида. Выражение (13) представляет собой математическую формулировку принципа Ферма: оптическая длина луча от падающего волнового фронта $\hat{O}$ до декартовой точки F' есть величина постоянная и равна оптической длине осевого луча, то есть имеет наименьшее по модулю значение.

По определению $[3]$ “параболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки F' этой плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой (директрисы), также расположенной в рассматриваемой плоскости”.

Из (12) и (13) следует, что

$$nz + n'L' = -nf', \text{ или } \; z + f' = -L'. \tag{14}$$

Выражение (14) соответствует определению параболы, приведенному выше. Совместим падающий волновой фронт с директрисой и найдем оптическую длину луча от падающего фронта $\hat{O}$ до фокуса F'. С учетом (12) и (13) получим:

$$\ell = n\frac{r}{2} + nz + n'L' = 0. \tag{15}$$

Таким образом, для параболы (равно как и для параболоида вращения) принцип Ферма выполняется по определению, причем оптическая длина луча от директрисы до фокуса равна нулю (15).

2. Гиперболоид и эллипсоид вращения

Поместим точку предмета на оси и на расстоянии s от вершины поверхности. Пусть падающий луч задан направляющим вектором $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{S} + \zeta\boldsymbol{k}$. Тогда $[1]$ для точки на оси можно записать:

$$\boldsymbol{P} = -s\boldsymbol{S}, \; \boldsymbol{P}\boldsymbol{S} = -s\boldsymbol{S}^2, \; \boldsymbol{P}^2 = s^2\boldsymbol{S}^2. \tag{16}$$

Подставим (16) в формулы по расчету хода луча $[1]$ и после преобразований получим:

$$z = \frac{n-\zeta}{b(1-e)(n-e\zeta)}, \tag{17}$$

$$\bar{\psi} = -\frac{2(n-e\zeta)^2}{\zeta(n-2e\zeta+ne^2)}. \tag{18}$$

Согласно $[2]$ и рисункам (2) и (3) запишем:

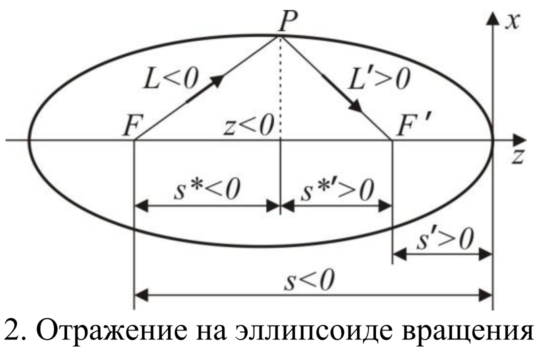

Рис. 2. Отражение на эллипсоиде вращения

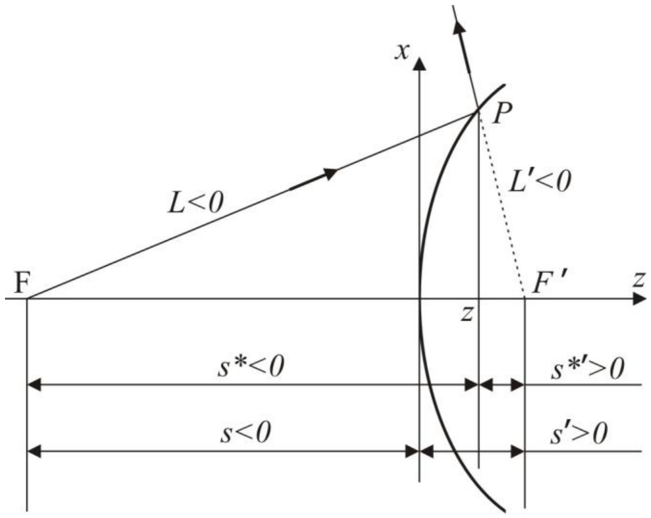

Рис. 3. Отражение на гиперболоиде вращения

$$l^* = \frac{s^*}{\zeta} = \frac{s - z}{\zeta}, \tag{19}$$

$$l^{*\prime} = \frac{s^{*\prime}}{\zeta'} = \frac{s' - z}{\zeta'}. \tag{20}$$

Полагая для отражения $n = n'$, найдем оптическую длину ℓ луча FPF' между декартовыми точками F и F' (рис. 2 и 3):

$$\ell = -nL + n'L' = -n^2 l^* + n^2 l^{*\prime}, \tag{21}$$

где $L < 0$ - геометрическая длина падающего луча FP, $L' > 0$ - геометрическая длина отраженного луча PF'. Подставим (9) в (21), получим:

$$\ell = -n^2 \frac{l^{*2} \varphi^*}{1 + l^* \varphi^*}. \tag{22}$$

Подставим (2), (10), (17), (18) и (19) в (22) и после преобразований получим:

$$\ell = \frac{2n}{b\left(e^2 - 1\right)}. \tag{23}$$

С учетом (2) и (3) найдем оптическую длину осевого луча:

$$\ell_0 = -n\left(s + s'\right) = \frac{2n}{b\left(e^2 - 1\right)}. \tag{24}$$

Таким образом, сравнивая (23) и (24), находим, что оптическая длина луча между декартовыми точками F и F' есть величина постоянная и равна оптической длине осевого луча, то есть имеет наименьшее по модулю значение.

По определению $[3]$ “эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F и F' этой плоскости есть величина постоянная” и “гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек F и F' этой плоскости есть величина постоянная”. Оба определения математически выражаются формулой (21) при $n = n' = 1$, а это означает, что для эллипса и гиперболы (равно как и для эллипсоида, и гиперболоида вращения) принцип Ферма выполняется по определению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Герцбергер М. Современная геометрическая оптика. - М.: Изд. иностр. лит., 1962 – 420 с.
2. Агапов Н.А. К вопросу о главных поверхностях оптических систем / Ред. журн. "Изв. вузов. Физика". - Томск, 2010. - Деп. в ВИНИТИ 20.12.2010, Рег. № 707-В2010.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. - М.: Наука, 1981 – 232 с.